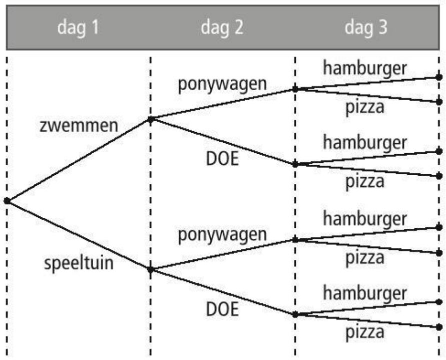
H1 **Tellen**

Voorkennis

Pagina 12

V-1a

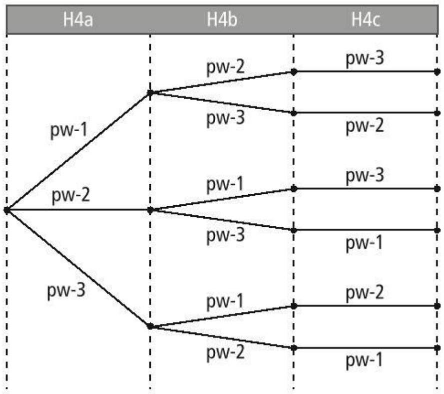


b Het totaal aantal mogelijkheden is gelijk aan het totaal aantal takken dat je telt bij dag 3. Dat aantal is gelijk aan 8.

V-2a

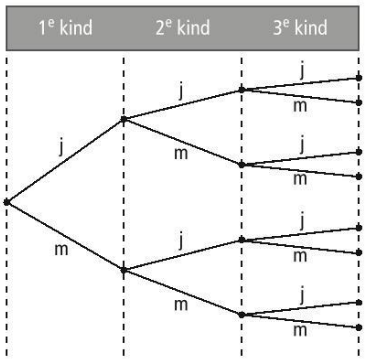
H4a	H4b	H4c
pw-1	pw-2	pw-3
pw-1	pw-3	pw-2
pw-2	pw-1	pw-3
pw-2	pw-3	pw-1
pw-3	pw-1	pw-2
pw-3	pw-2	pw-1

b



Pagina 13

V-3a



b Er zijn $2 \times 2 \times 2 = 8$ geboortevolgorden.

c Er zijn vier geboortevolgorden waarbij het tweede kind een meisje is: j-m-j, j-m-m, m-m-m en m-m-j.

d

aantal meisjes	0	1	2	3
aantal volgorden	1	3	3	1

V-4a Na twee sets gewonnen te hebben is Serena Williams winnares. Er hoeft geen derde set meer te worden gespeeld.

b Er zijn zes manieren waarop dat kan, want er zijn zes wegen in het boomdiagram mogelijk.

c Er zijn drie manieren waarbij Williams wint.

d Dat is van boven af de tweede route.

e Een andere route met hetzelfde resultaat is: Radwanska − Williams − Williams.

f Het gaat erom wie van beide heren het eerst drie sets heeft gewonnen. Als je een gewonnen set van de ene speler aangeeft met A en die van de andere speler met B, zijn er de volgende spelverlopen mogelijk:

A-A-A	B-B-B	(winnen in 3 sets)
A-A-B-A	B-B-A-B	(winnen in 4 sets)
A-B-A-A	B-A-B-B	
B-A-A-A	A-B-B-B	
B-B-A-A-A	A-A-B-B-B	(winnen in 5 sets)
B-A-B-A-A	A-B-A-B-B	
B-A-A-B-A	A-B-B-A-B	
A-B-B-A-A	B-A-A-B-B	
A-B-A-B-A	B-A-B-A-B	
A-A-B-B-A	B-B-A-A-B	

In het totaal zijn er dan 20 wedstrijdverlopen mogelijk.

V-5a Dat gebeurt bij 6 worpen.

b Dat is bij 6 + 2 = 8 worpen het geval.

c Dat gebeurt bij 18 worpen.

d

×	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

e Het product van de ogenaantallen is in 4 gevallen gelijk aan 12.

f Een oneven product komt 9 keer voor.

1-1 Mogelijkheden tellen

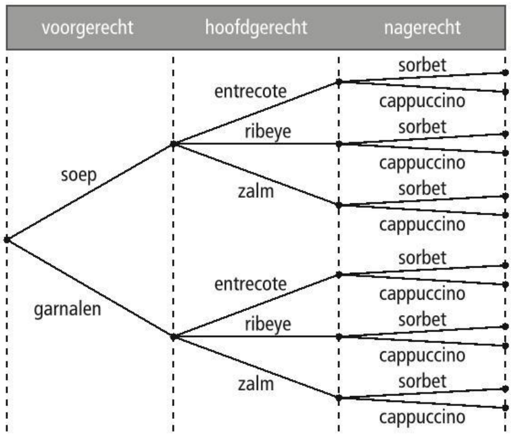
Pagina 14

1a Dat komt omdat er drie gangen zijn.

b Op de stippen boven de kolommen komen Voorgerecht, Hoofdgerecht en Nagerecht.

c Bij de getekende takken komen de woorden Soep en Garnalen.

d



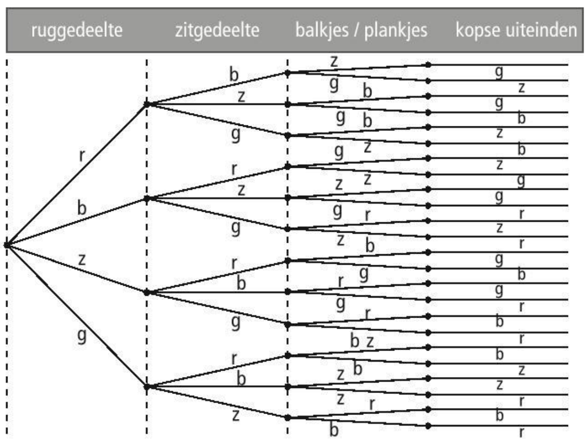
e In het totaal zijn er $2 \times 3 \times 2 = 12$ verschillende menu's mogelijk.

2a Er zijn $4 \times 3 \times 2 = 24$ verschillende uitvoeringen mogelijk.
b Er rijden $4 \times 2 \times 2 = 16$ uitvoeringen niet op diesel.

3a Leo had baan 1 en baan 2 bovenaan in het diagram moeten zetten en de kleuren rood, wit en blauw bij de mogelijke keuzes voor elk van de banen moeten nemen. Nu heeft hij het net andersom gedaan, waardoor bijvoorbeeld baan 1 drie verschillende kleuren zou kunnen hebben.
b Bij een correct boomdiagram staan de banen 1 en 2 bovenaan in het diagram en kan elk van de banen de kleuren rood, wit en blauw krijgen, dus bij baan 1 komen er drie takken en elk van die takken splitsen in drie takken voor elk van de kleuren voor baan 2.
Dat geeft in het totaal 9 mogelijkheden.

Pagina 15

4a



b Als de drie verschillende onderdelen van de stoel allemaal een verschillende kleur krijgen, zijn er $4 \times 3 \times 2 = 24$ verschillende mogelijkheden.

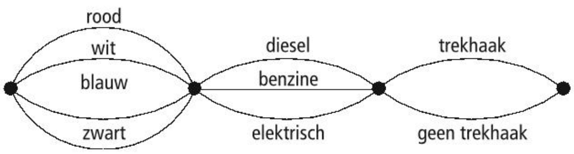
5 Voor de bovenste baan kun je kiezen uit vier kleuren en voor elke volgende baan uit drie kleuren, omdat je de kleur van de baan er boven niet mag gebruiken.
Er zijn dus $4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 324$ verschillende vlaggen mogelijk.

6a RWRWRWW WRWRWRW
RWRWWRW WRWWRWR
RWRWWWR WRWRWWR
RWWRWRW WWRWRWR
RWWWRWR RWWRWWR
Er zijn 10 verschillende rijtjes mogelijk.

b Het eerste tweetal kun je op $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ manieren kiezen. Je moet door twee delen, omdat de volgorde van het gekozen tweetal onbelangrijk is. Je hebt dan nog vier leerlingen over. Daaruit kun je nog op $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ verschillende manieren een tweetal kiezen. De overige twee leerlingen vormen dan het laatste tweetal.
Het totaal aantal manieren is dus $15 \times 6 = 90$.

7a Er zijn $3 \times 2 = 6$ wandelingen mogelijk.
b Dan zijn er $3 \times 5 = 15$ wandelingen mogelijk.

8a



Uit het diagram zijn de antwoorden van opdracht 2 af te lezen.
b Een wegendiagram is dan niet zo handig omdat op de andere typen auto's wel een trekhaak mogelijk is.
Je kunt dat in een wegendiagram niet goed weergeven, omdat steeds meerdere wegen in één punt samenkomen en vertrekken.

1-2 Machtsbomen en faculteitsbomen

Pagina 16

9a Boven aan het boomdiagram staat : eerste keer, tweede keer en derde keer. Je tekent twee takken, die elk nog twee keer splitsen in twee takken.
b Er zijn $2 \times 2 \times 2 = 8$ uitslagvolgordes
c Je tekent dan weer twee takken die elk nog vier keer splitsen in twee takken. Er zijn dan $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ uitslagvolgordes.
d Je moet dan uitrekenen $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.
e Je zoekt een macht van 2 die groter is dan 1000. Er geldt $2^9 = 512$ en $2^{10} = 1024 > 1000$.
Je moet dan dus minstens 10 keer gooien.

10 Voor elke broodsoort kan Peter kiezen uit vijf soorten beleg.
Het lunchpakket kan dus op $5 \times 5 \times 5 = 125$ manieren worden samengesteld.

11a Voor elke worp zijn er 6 mogelijkheden, dus in het totaal zijn er $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 6^4 = 1296$ getallen mogelijk.
b Janneke kan 6 keer uit 4 mogelijkheden kiezen.
Dat kan op $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4096$ verschillende manieren.

Pagina 17

12a Het boomdiagram krijgt zes kolommen, want je gaat elke driehoek kleuren.
b Driehoek 1 kun je met zes kleuren kleuren.
c Driehoek 2 kun je niet meer kleuren met de kleur die je driehoek 1 hebt gegeven, dus met vijf kleuren.
d Het aantal mogelijkheden is $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

13 Het aantal mogelijkheden is $5! = 120$.

14a $10! = 3\,628\,800$
$14! = 87\,178\,291\,200$
b $\frac{5!}{4!} = 5$, $\frac{11!}{10!} = 11$, $\frac{11!}{9!} = 110$ en $\frac{100!}{97!} = 100 \times 99 \times 98 = 970\,200$

15a Dat kan op $6! = 720$ manieren.
b Dat kan op $26^4 = 456\,976$ manieren.
c Er zijn dan $5! = 120$ verschillende woorden mogelijk.
d Dan zijn er $3^{50} = 717\,897\,987\,691\,852\,588\,770\,249$ manieren van beantwoorden.

1-3 Permutaties

Pagina 18

16a Het is geen machtsboom omdat je de voorzitter uit dertien mensen kiest maar de secretaris en de penningmeester uit een kleiner aantal mensen. Het is geen faculteitsboom omdat je maar drie mensen kiest en geen dertien.
b Er zijn drie kolommen.
c Bij de eerste kolom zijn er dertien takken, bij de tweede kolom 12 takken en bij de derde kolom elf takken.
d Er zijn $13 \times 12 \times 11 = 1716$ bestuurssamenstellingen mogelijk.

17a Het eerste werk kan hij op 9 plaatsen ophangen, het tweede werk nog op 8 plaatsen en zo verder. Het totaal aantal manieren is dus gelijk aan $9! = 362\,880$.
b Op plek één zijn er 9 mogelijkheden en op plek twee 8.
c Het totaal aantal mogelijkheden is $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 60\,480$.

18a Het aantal permutaties van 4 uit 14 is gelijk aan $14 \times 13 \times 12 \times 11 = 24\,024$.
Het aantal permutaties van 3 uit 8 is gelijk aan $8 \times 7 \times 6 = 336$.
b Het aantal permutaties van 5 uit 12 is gelijk aan $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040$.
Het aantal permutaties van 4 uit 30 is gelijk aan $30 \times 29 \times 28 \times 27 = 657\,720$.
c Het gaat dan om het aantal verschillende volgordes van het totale aantal. Dat zijn er $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$

19a Het aantal verschillende truien is gelijk aan het aantal permutaties van 5 uit 8. Dus $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

b Het aantal verschillende woorden is gelijk aan het aantal permutaties van 4 uit 26 en is gelijk aan $26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358\,800$.

c Het aantal verschillende mogelijkheden is gelijk aan het aantal permutaties van 5 uit 40 en dus gelijk aan $40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 = 78\,960\,960$.

Pagina 19

20a Het aantal verschillende wikkels is $6! = 720$.

b Het aantal is gelijk aan het aantal permutaties van 6 uit 10, dus $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151\,200$.

c Omdat Nederlands al één van de talen is die je kiest, kun je er maar 5 talen kiezen uit de 9 overige talen.
Dus is het aantal mogelijkheden gelijk aan het aantal permutaties van 5 uit 9.
Dit aantal is $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\,120$.

21a De driehoekige vlakjes kunnen op $4! = 24$ manieren worden gekleurd met de kleuren rood, geel, blauw en zwart.

b Er kunnen acht vlakken worden gekleurd. Het aantal mogelijke viertallen vlakjes is gelijk aan het aantal permutaties van 4 uit 8. Dit aantal is gelijk aan $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1\,680$. Elk van deze viertallen vlakjes kan op 24 manieren worden gekleurd.
Dit geeft een totaal aantal mogelijkheden van $1\,680 \times 24 = 40\,320$.

22a Het aantal manieren waarop de taken kunnen worden verdeeld is gelijk aan het aantal permutaties van 3 uit 8, dus $8 \times 7 \times 6 = 336$.

b Dat aantal is gelijk aan $8! = 40\,320$.

c De meisjes kunnen op $4! = 24$ verschillende manieren in de ene roeiboot gaan zitten en de jongens op 24 verschillende manieren in de andere roeiboot.
Dat zijn $24 \times 24 = 576$ verschillende mogelijkheden.

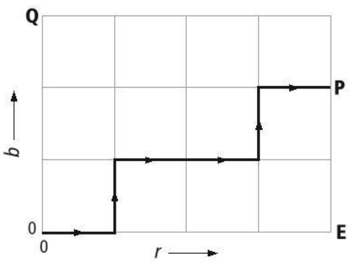
d Berber kan uit 8 plaatsen kiezen, maar Luuk kan eigenlijk niet kiezen. Hij gaat naast Berber zitten en heeft dus maar één mogelijke zitplaats.

e Nadat Berber en Luuk zijn gaan zitten, zijn er nog 6 zitplaatsen over.
Het aantal verschillende mogelijkheden is dus $8 \times 1 \times 6! = 5\,760$.

1-4 Routes in een rooster

Pagina 20

23a



b Andere routes zijn bijvoorbeeld : r r b r b r, b b r r r r en r r b b r r.
c Je zou dan drie keer een stap naar boven doen en er moeten maar twee stappen naar boven worden gedaan.
d Om bij *Q* te komen moet je drie stappen naar boven doen, waardoor je een omweg zou moeten maken om bij *P* uit te komen.

24a De punten *B* en *C* bereik je door meteen naar rechts te gaan en *F* door meteen naar boven te gaan. Dat kan maar op één manier.
b De punten *D*, *E* en *K* kun je ook maar op één manier bereiken.
c Je kunt bij punt *G* komen via *B*, maar ook via *F*.
d Bij punt *H* kun je dus op 2 + 1 = 3 manieren komen.
e Bij *L* komt het getal 3, want je kunt er op twee manieren komen via *G* en op één manier via *K*.
f Bij *M* kun je komen op drie manieren via *H* en op drie manieren via *L*, dus op 6 manieren.
g

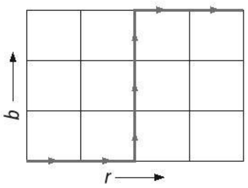
punt	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*	*P*
aantal wegen	1	1	1	1	1	2	3	4	5	1	3	6	10	15

h Je kunt op 15 manieren bij punt *P* komen.

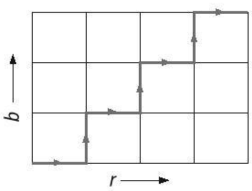
25a Dat kan op 21 + 35 = 56 manieren.
b Dat kan op 15 manieren.
c Om van *R* naar *S* te komen moet je 3 stappen naar rechts en 5 naar boven doen; dat geeft hetzelfde aantal routes als je krijgt wanneer je van de oorsprong naar (3, 5) gaat en dat aantal is 56.
d Je moet dan 6 stappen naar rechts en 4 stappen naar beneden.
Dat geeft hetzelfde aantal routes als het aantal dat je krijgt wanneer je van *O* naar (6, 4) gaat.
Dat aantal is 210.

Pagina 21

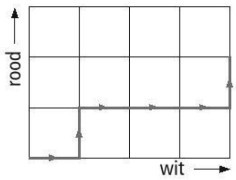
26a



b



c Het aantal scoreverlopen is gelijk aan het aantal routes van O naar (4, 3).
Dit aantal is gelijk aan 35.

27a 

b Er zijn 15 verschillende kleurpatronen.

c Je telt dan in een rooster het aantal routes van O naar (5, 3). Dit aantal is gelijk aan 56.

28 Je telt dan in een rooster het aantal routes van O naar (4, 3). Dit aantal is gelijk aan 35.

29a Het aantal routes van P naar Q is gelijk aan het aantal routes van O naar (3, 3) en is gelijk aan 20.

b Het aantal routes van Q naar R is gelijk aan het aantal routes van O naar (2, 2) en is gelijk aan 6.

c Elke route van P naar Q kun je combineren met elke route van Q naar R. Het aantal routes van P naar R is dus gelijk aan $20 \times 6 = 120$ en Bert heeft gelijk.

30 Het aantal verschillende lijsten van 8 vragen met 2 fouten kun je berekenen door in een rooster in de ene richting het aantal goede en in de andere richting het aantal foute antwoorden aan te geven en dan het aantal routes te tellen van O naar (6, 2). Dit aantal is gelijk aan 28. Zo ga je ook te werk als je het aantal verschillende lijsten van 4 vragen met twee fouten wilt tellen. Je telt dan in het rooster het aantal routes van O naar (2, 2). Dat zijn er 6. Door te combineren vind je het totaal aantal mogelijke lijsten van Lucia.
Dat zijn er $6 \times 28 = 168$.

1-5 Combinaties

Pagina 22

31a Er zijn 210 routes van (0, 0) naar (6, 4) en ook 210 routes naar (4, 6).

b Het getal 21 geeft het aantal routes aan van (0, 0) naar (5, 2) of naar (2, 5) en het getal 126 geeft het aantal routes van (0, 0) naar (5, 4) of naar (4, 5).

c Er zijn 120 routes van (0, 0) naar (3, 7).

d Het getal 45 is de som van het getal 9 dat er links boven en het getal 36 dat er rechts boven staat.

e De volgende rij getallen is: 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

32a Het 3^e getal op rij 5 is het aantal mogelijke kortste routes van (0, 0) naar (3, 2).

b Het 7^e getal op rij 9 is het aantal mogelijke kortste routes van (0, 0) naar (3, 6).

c Het 7^e getal op rij 6 is het aantal mogelijke kortste routes van (0, 0) naar (0, 6).

d Het 3^e getal op rij 7 is het aantal mogelijke kortste routes van (0, 0) naar (5, 2).

e Het 5^e getal op rij 10 is het aantal mogelijke kortste routes van (0, 0) naar (6, 4).

33 Je telt dan het aantal kortste routes van (0, 0) naar (3, 4). Dit aantal is gelijk aan 35.

Pagina 23

34 Je zou dan de driehoek moeten uitbreiden met acht rijen.

35a Bereken het aantal combinaties van 4 uit 8 is gelijk aan 70.
Het aantal combinaties van 4 uit 14 is gelijk aan 1001.
Het aantal combinaties van 14 uit 20 is gelijk aan 38760.

b $\binom{5}{2} = 10$ en $\binom{15}{6} = 5005$

c $\binom{9}{3} = \binom{9}{6}$, want als je uit een negental dingen er drie kiest, blijven er steeds zes over.
Het aantal mogelijke drietallen is dus gelijk aan het aantal mogelijke zestallen die je uit het negental dingen kunt kiezen.

d Dat aantal is gelijk aan de combinatie $\binom{7}{3} = 35$.

36a Het aantal mogelijke scoreverlopen is gelijk aan $\binom{10}{4} = 210$.

b Het aantal manieren is gelijk aan $\binom{20}{15} = \binom{20}{5} = 15\,504$.

37a Het aantal manieren is gelijk aan $\binom{37}{8} = 38\,608\,020$.

b Als Mark als eerste een drietal boeken krijgt is het aantal mogelijkheden gelijk aan $\binom{8}{3} = 56$.
Er zijn dan nog vijf boeken over en uit dat vijftal krijgt Koen drie boeken.
Het aantal mogelijke drietallen boeken voor Koen is gelijk aan $\binom{5}{3} = 10$.
Dus het totaal aantal mogelijkheden is gelijk aan $56 \times 10 = 560$.

1-6 Het goede telmodel kiezen

Pagina 24

38a Een rooster is geen goed telmodel omdat er drie soorten activiteiten zijn en in een rooster kun je maar twee richtingen kiezen.

b Het aantal verschillende programma's is gelijk aan $4 \times 5 \times 3 = 60$.

c Vijf wandelaars kiezen de ene gids.
Het aantal manieren waarop dat kan, is gelijk aan $\binom{10}{5} = 252$.
De rest van de tien wandelaars gaat met de andere gids mee.
Er zijn dus 252 verschillende verdelingen van de wandelaars over de gidsen mogelijk.

39a Het aantal verschillende volgordes is gelijk aan $24! \approx 6{,}204484017 \times 10^{23}$.

b Het aantal mogelijkheden is gelijk aan $\binom{24}{10} = 1961256$.

c Het aantal rijtjes is gelijk aan
$24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15 = 7{,}117005773 \times 10^{12}$.

Pagina 25

40a Er zijn $10^4 = 10000$ verschillende codes mogelijk.
b Op zijn hoogst moet hij $4! = 24$ verschillende codes uitproberen.
c Van de vier cijfers zijn er twee drieën. Die twee drieën kun je op $\binom{4}{2} = 6$ manieren neerzetten. De overige twee cijfers zijn dan vieren.
Het totaal aantal mogelijkheden is dus gelijk aan 6.

41a Het aantal parkeervolgorden is gelijk aan $4! = 24$.
b Het aantal mogelijke dagroosters is gelijk aan $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.
c Het aantal manieren is gelijk aan $\binom{7}{3} = 35$.

42a Op een achterste rij zijn er acht velden. Vijf pionnen kun je dan op $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$ verschillende manieren neerzetten. Omdat dit voor beide spelers geldt, is het totaal aantal beginopstellingen gelijk aan $56 \times 56 = 3136$.
b Op rij 5 staan dan vijf witte en drie zwarte pionnen of vijf zwarte en drie witte pionnen of van elke kleur vier pionnen. Het totaal aantal manieren is dus $\binom{8}{5} + \binom{8}{4} + \binom{8}{3} = 56 + 70 + 56 = 182$.

1-7 Gemengde opdrachten

Pagina 26

43a Je hebt 12 blokken. Bij elk blok hebben we de keus uit 6 kleuren. Zonder verdere beperking geeft dat 6^{12} mogelijke kleuringen.
b Twee opeenvolgende blokken moeten verschillend gekleurd worden. Voor het eerste blok heb je de keus uit 6 kleuren. Voor de volgende: 5 (moet verschillen van de eerste). Voor de volgende weer 5 (moet verschillen van de tweede; mag best weer hetzelfde zijn als de eerste). Etc. Dus: 6×5^{11}.
c Rood moet minstens één keer voorkomen. Dan moet je uit de oplossing van vraag b alles verwijderen wat nul rode heeft. Voor de onderste is de keus uit 5 kleuren. Voor de tweede 4, voor dederde 4 etc. Dus: 5×4^{11}. Totaal $6 \times 5^{11} - 5 \times 4^{11}$.

44a Er zijn 6 mogelijke volgordes waarbij meteen taart 4 als eerste wordt getoond. Dit zijn de volgorden: 4 1 2 3, 4 1 3 2, 4 2 1 3, 4 2 3 1, 4 3 1 2 en 4 3 2 1.
b Bij de volgende volgorden heb je de grootste taart:

1 4 2 3	3 1 4 2
1 4 3 2	3 2 1 4
2 1 4 3	3 2 4 1
2 4 1 3	3 4 1 2
2 4 3 1	3 4 2 1
3 1 2 4	

Er zijn dus 11 volgordes waarbij je de grootste taart krijgt als je deze strategie volgt.

c Bij deze strategie heb je in de volgende gevallen de grootste taart:

1 2 4 3	2 3 4 1
1 3 4 2	3 1 2 4
1 3 2 4	3 1 4 2
2 1 4 3	3 2 1 4
2 3 1 4	3 2 4 1

Er zijn dan 10 volgordes waarbij je de grootste taart krijgt. Dat is minder gunstig dan de strategie van opdracht 44b.

45a Er zijn 6! = 720 verschillende volgorden waarin je de zes busjes kunt omkeren.

b Als je de mogelijkheid dat je een munt onder een busje vindt aangeeft met M en een busje zonder munt eronder met *, zijn er de volgende mogelijkheden:

M M	* M M	* * M M	* * * M M	M * * * * M
	M * M	* M * M	* * M * M	* M * * * M
		M * * M	* M * * M	* * M * * M
			M * * * M	* * * M * M
				* * * * M M

Het totaal aantal mogelijkheden is 1+2+3+4+5=15.
Daarvan zijn er 3 waarbij je minder dan vier busjes optilt. Dat is $\frac{3}{15} \times 100\% = 20\%$.

Pagina 27

46a De muziekinstrumenten kunnen op 6! = 720 manieren over de mensen verdeeld worden.

b

	A	B	C	D	E	F
1	Piano	Keyboard	Gitaar	Drumstel	Basgitaar	Altsax
2	Piano	Altsax	Keyboard	Drumstel	Basgitaar	Altsax
3	Piano	Altsax	Keyboard	Drumstel	Gitaar	Basgitaar
4	Piano	Altsax	Keyboard	Gitaar	Drumstel	Basgitaar
5	Piano	Altsax	Keyboard	Gitaar	Drumstel	Altsax
6	Piano	Altsax	Keyboard	Gitaar	Basgitaar	Drumstel
7	Piano	Altsax	Gitaar	Drumstel	Basgitaar	Keyboard
8	Altsax	Piano	Keyboard	Drumstel	Gitaar	Basgitaar
9	Altsax	Piano	Keyboard	Gitaar	Drumstel	Basgitaar
10	Altsax	Piano	Keyboard	Gitaar	Basgitaar	Drumstel
11	Altsax	Piano	Gitaar	Drumstel	Basgitaar	Keyboard

Er zijn in totaal 11 manieren om de instrumenten te verdelen.

c De vriendengroep bestaat uit drie mannen en drie vrouwen. De twee vrouwen die elk een solo zingen, kun je op 3 × 3 = 9 manieren kiezen. Eén man kun je ook op drie manieren kiezen.
Er zijn dus 9 × 3 = 27 mogelijke manieren om de solo's te verdelen.

d Er zijn $\binom{6}{3} = 20$ mogelijke drietallen groepsleden voor het interview met het ene radiostation. De overige drie doen het interview met het andere radiostation. In het totaal zijn er dus 20 manieren waarop dit kan (er wordt hier geen onderscheid gemaakt naar welk radiostation ze gaan).

e De drie vrouwen gaan naar het ene radiostation wanneer de drie mannen naar het andere radiostation gaan. Dat gebeurt dus maar bij één van de mogelijke verdelingen in drietallen. Er blijven dan $20 - 1 = 19$ verdelingen over waarbij de drie vrouwen niet naar hetzelfde radiostation gaan.

47 Er zijn $2 \times 2 \times 2 = 8$ verschillende typen fruitvliegjes. Voor de twee vrouwtjes zijn er dus $8 \times 7 = 56$ verschillende keuzemogelijkheden. Ook voor de twee mannetjes zijn er 56 keuzemogelijkheden. Het viertal fruitvliegjes kan dus op $56 \times 56 = 3136$ verschillende manieren gekozen worden.

Test jezelf

Pagina 30

T-1a Er zijn $3 \times 2 \times 1 = 6$ verschillende volgorden.

b Nu zijn er $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ verschillende volgorden.

c De bovenste baan kan met 4 verschillende kleuren gekleurd worden. Elke volgende baan kan met drie kleuren worden gekleurd. In het totaal kan de vlag op $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$ verschillende manieren worden gekleurd

T-2a De overige vier nummers kunnen in elke mogelijke volgorde te horen zijn. Dat betekent dat bij $4! = 24$ volgorden van afspelen het nummer Big Sensation als eerste is te horen.

b Dan zijn er $5^5 = 3125$ verschillende mogelijkheden.

T-3a Het aantal mogelijke volgorden is dan $10! = 3\,628\,800$.

b Het aantal volgorden is $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 604800$.

T-4a Van A naar B betekent 6 stappen naar rechts en twee naar boven.

Dat kan op $\binom{8}{2} = 28$ manieren.

Van B naar C betekent twee stappen naar rechts en vijf naar boven.

Dat kan op $\binom{7}{2} = 21$ manieren.

b Het aantal kortste routes van A via B naar C is gelijk aan $28 \times 21 = 588$.

T-5a Bij dit probleem hoort een rooster waarbij langs de ene as één van de kleuren hoort (bijvoorbeeld grijs) en bij de andere as de andere kleur (rood).

b Je let op de kleur van de auto's. Bij een grijze auto doe je een stap naar rechts in het rooster en bij een rode auto een stap naar boven. Als je alle auto's hebt gehad ben je in het punt (4, 2). Vervolgens tel je het aantal routes van (0, 0) naar (4, 2). Dat zijn er $\binom{6}{2} = 15$.

Dus zijn er 15 mogelijke volgorden in de geparkeerde auto's.

Pagina 31

T-6a Het aantal volgorden is $\binom{6}{3} = 20.$

b Het aantal scoreverlopen is $\binom{11}{5} = 462.$

c Het aantal manieren waarop de meerkeuzetoets gemaakt kan zijn is $\binom{8}{2} = 28.$

T-7a Het aantal manieren is gelijk aan $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 40\,320.$

b Dat kan op $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 40\,320$ manieren.

c Het aantal manieren waarop je vier kleuren kunt kiezen is gelijk aan $\binom{8}{4} = 70.$

De drie letters van het vierkant linksboven kunnen op $4 \times 3 \times 2 = 24$ verschillende manieren worden gekleurd.
De letters van het vierkant rechtsonder kunnen op $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ verschillende manieren worden gekleurd. Het totaal aantal mogelijk manieren is dus $70 \times 24 \times 24 = 40\,320.$

d Er zijn kleuringen waarbij alle letters een verschillende kleur hebben. Dat zijn er $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$. Er zijn kleuringen met drie verschillende kleuren; dan hebben precies twee tegenover elkaar geplaatste letters dezelfde kleur. Dat kan voor elk van beide mogelijkheden op $8 \times 1 \times 7 \times 6 = 336$ manieren. En er zijn kleuringen waarbij maar twee verschillende kleuren worden gebruikt. In dat geval hebben beide paren letters die tegenover elkaar liggen dezelfde kleur. Dit kan op $8 \times 7 = 56$ manieren.
Het aantal verschillende kleuringen van de letters is dan $1680 + 2 \times 336 + 56 = 2408.$

T-8a De conducteur kiest drie van de negen vakjes om er een gaatje in te ponsen, dus dat kan op $\binom{9}{3} = 84$ manieren.

b Als het tweede gaatje wordt geponst in een andere rij of kolom dan het eerste gaatje zijn er bij elk eerste gaatje vier mogelijkheden voor het tweede gaatje. Dit geeft $9 \times 4 = 36$ tweetallen gaatjes. Daarbij wordt elke mogelijkheid dubbel meegeteld, want als je bijvoorbeeld eerst een gaatje ponst in vakje 3 en daarna in vak je 8 heb je dezelfde mogelijkheid dan wanneer je eerst in vakje 8 en daarna in vakje 3 ponst. Dus zijn er 18 verschillende mogelijkheden.

c In elk vakje kun je een gaatje ponsen of niet. Dus voor elk vakje zijn er twee mogelijkheden. Dat geeft in het totaal $2^9 - 1 = 511 > 400$ mogelijkheden. Daarbij houd je er rekening mee dat de mogelijkheid dat je in geen enkel vakje een gaatje ponst niet meetelt. Dus is het mogelijk dat in elke trein op een verschillende manier gaatjes worden geponst.

Extra oefening Basis

Pagina 32

B-1 Voor de eerste binnensport kun je uit vier mogelijkheden kiezen. Voor de buitensport kun je uit drie mogelijkheden kiezen. De tweede keer dat je een binnensport kiest zijn er nog drie mogelijkheden. In het totaal geeft dit $4 \times 3 \times 3 = 36$ mogelijkheden.

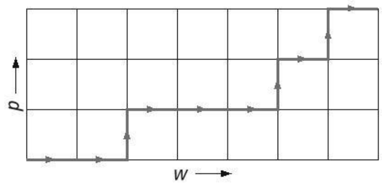
B-2a De kinderen kunnen elk uit zeven mogelijke soorten dropjes kiezen. Er zijn dus $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 = 16\,807$ verschillende rijtjes mogelijk.

b Het aantal rijtjes met verschillende dropjes is $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$.

B-3a Het aantal rijtjes dat je zo kunt maken is gelijk aan $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

b De rode knikker is de eerste en kan dus niet gekozen worden. Er zijn $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ verschillende rijtjes.

B-4a



b Er moet tien keer een stap in het rooster worden gedaan, waarvan drie keer de ene kant op en zeven keer de andere kant. Dat geeft $\binom{10}{3} = 120$ mogelijkheden.

B-5a Het aantal vertegenwoordigingen is gelijk aan $\binom{24}{3} = 2024$.

b Dan is het aantal vertegenwoordigingen gelijk aan $\binom{24}{5} = 42\,504$.

B-6a Het aantal verschillende patronen is dan $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$.

b Er zijn twaalf vakjes waaruit je er zes kiest om een gaatje in te ponsen.

Dat kan op $\binom{12}{6} = 924$ verschillende manieren.

c Op één rij zijn er vier vakjes . Je kunt daaruit op $\binom{4}{2} = 6$ verschillende manieren twee vakjes kiezen om er een gaatje in te ponsen. Dat doe je ook bij de andere twee rijen. Er zijn dus $6 \times 6 \times 6 = 216$ verschillende mogelijkheden.

Extra oefening – Gemengd

Pagina 33

G-1a Er zijn 4! = 24 verschillende verdelingen mogelijk.

b Voor de voorzittersfunctie zijn er dan 2 mogelijkheden. Daarna kun je nog uit 3 mensen kiezen. In het totaal geeft dit $2 \times 3 \times 2 \times 1 = 12$ mogelijkheden.

c Voor de functies van voorzitter en vicevoorzitter zijn er $4 \times 3 = 12$ keuzemogelijkheden. Daarbij zijn er 6 waarbij Willem een van beide functies heeft. Bij elk van die mogelijkheden kun je de penningmeester nog uit twee mensen kiezen. Dat geeft $6 \times 2 \times 1 = 12$ mogelijkheden.
Bij de overige 6 mogelijkheden moet je Willem uitsluiten bij de keuze voor penningmeester.
Dat geeft nog eens $6 \times 1 = 6$ mogelijkheden. Samen zijn er dus 18 mogelijkheden.

d Voor de keuze van voorzitter en vicevoorzitter kun je dan uit 2 mensen kiezen. In het totaal geeft dit $4 \times 2 = 8$ mogelijkheden. Voor de penningmeester zijn er dan nog twee keuzemogelijkheden en voor secretaris nog één mogelijkheid, dus $8 \times 2 \times 1 = 16$ mogelijkheden.

G-2a Voor de 3 zijn vijf plaatsen beschikbaar. Voor de 5 zijn nog vier plaatsen beschikbaar.
De overige drie plaatsen zijn zessen.
Er zijn dus $5 \times 4 = 20$ getallen mogelijk.

b Kies eerst vijf uit de acht getallen. Dat kan op $\binom{8}{5} = 56$ manieren.

Bij elk van deze 56 combinaties is het op een manier mogelijk de getallen in opklimmende volgorde te plaatsen, dus er zijn 56 van deze getallen mogelijk.

c Een dergelijk getal zonder enen is niet mogelijk, omdat met vier tweeën de som van de cijfer al gelijk is aan 8. Er moet dus minstens één 1 in staan.
Er zijn 5 mogelijke getallen met vier enen en een vier.
Er zijn $\frac{5!}{3!} = 20$ mogelijke getallen met drie enen, een twee en een drie.
Er zijn $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ getallen met twee enen en drie tweeën.
Samen geeft dat $5 + 10 + 20 = 35$ mogelijke getallen.

G-3a De negen gasten kunnen op $9! = 362\,880$ manieren aan tafel gaan zitten.

b Er zijn $11! = 39\,916\,800$ verschillende mogelijkheden.

c De gastheer en zijn vrouw kunnen op 7 verschillende manieren naast elkaar zitten zo dat de gastvrouw links van de gastheer zit. Er zijn dan nog 9 plaatsen te verdelen. Dat geeft een totaal van $7 \times 9! = 2540160$ verschillende mogelijkheden.

G-4a In het totaal zijn er dus $13 + 5 = 18$ passagiers.
Je kunt in het kleinste busje 8 passagiers en in het grootste busje 10 passagiers kwijt.
Je kunt in het kleinste busje 7 passagiers en in het grootste 11 passagiers kwijt.
Of in het kleinste busje 6 en in het grootste busje 12.

b Het aantal manieren waarop dit kan, is gelijk aan $\binom{13}{5} \times \binom{5}{2} = 12\ 870$.

c Er zijn volgens opdracht G-4a maar drie manieren waarop je de busjes kunt vullen. Als je let op het aantal passagiers in het kleinste busje, vind je dat het totaal aantal mogelijke verdelingen gelijk is aan $\binom{18}{8} + \binom{18}{7} + \binom{18}{6} = 94146$.

d Er zijn vijf bewoners die in de kleine bus reizen. Deze kunnen op $5! = 120$ verschillende volgorden instappen. De twee begeleiders kunnen op twee volgorden instappen.
In totaal zijn dat $120 \times 2 = 240$ volgorden van instappen.

Uitdagende opdrachten

Pagina 34

U-1a Het totaal aantal mogelijkheden is dan gelijk aan $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$.

b Het kleinste aantal kleuren krijg je als je tegenover elkaar gekleurde vlakken dezelfde kleur geeft. Met drie kleuren kun je dan toe.

c Je kunt op $\binom{6}{3} = 20$ manieren een drietal kleuren kiezen. Met elk drietal kleuren kun je de vlag op 3! = 6 manieren kleuren.
Er zijn dus $20 \times 6 = 120$ verschillende manieren.

d Je kunt op $\binom{6}{4} = 15$ verschillende manieren vier kleuren kiezen.
Met elk viertal kleuren kun je de vlag op $2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ manieren kleuren, waarbij één paar tegenover elkaar gelegen vlakken dezelfde kleur heeft en dat kan op twee verschillende manieren.
Dus is de vlag op $15 \times 48 = 720$ manieren met vier kleuren te kleuren.
Het totaal aantal mogelijke kleuringen is dus $720 + 720 + 120 = 1560$.

U-2a Er zijn 4! = 24 verschillende volgorden van de vier kleuren. Bij elk paar schoenen kunnen linker- en rechterschoen op twee manieren naast elkaar staan. Dat geeft $24 \times 2^4 = 384$ mogelijkheden.

b Op positie 1 staat een linkerschoen, want als er een rechterschoen stond, dan zou de bijbehorende linkerschoen daar rechts van staan.
Voor de schoen op positie 1 zijn er 4 mogelijkheden. De bijbehorende rechterschoen kan op 7 verschillende plaatsen staan.

c In het totaal kan dat op $4 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 1 \times 1 = 2520$ manieren.

U-3a Als alle ballen in 1 doos terecht komen, zijn er 8 mogelijke verdelingen.
Als alle ballen in 2 dozen terecht komen, zit er in elke doos minstens 1 bal.
Je kunt in één van de dozen twee ballen en in de andere een bal doen.
Het aantal manieren waarop dit kan, is $\binom{8}{2} \cdot 2 = 56$.
Je kunt op $\binom{8}{3} = 56$ manieren een drietal dozen uitkiezen. Er is 1 manier om de drie ballen volgens het schema 1 1 1 over de drie dozen te verdelen.
Dus kun je de drie ballen op 56 manieren over de drie dozen verdelen.

b In het totaal kun je de drie ballen op 56 + 56 + 8 = 120 manieren over de drie dozen verdelen.

c Bij tekening 2 hoort het rijtje 10001000101001110.

d Er zijn 10 nullen en 7 enen.

e Het aantal is gelijk aan het aantal verschillende rijtjes dat je met 10 nullen en 7 enen kunt maken. Dit aantal is gelijk aan $\binom{17}{7} = 19448$.

f Je maakt dan rijtjes met 3 nullen en 7 enen. Het aantal rijtjes is dan gelijk aan $\binom{10}{3} = 120$.