

## Voorwoord

Deze samenvatting is gedurende VWO 6 (2016-2017) in elkaar gezet door een soort crowd writing (onder andere nvt). Grotendeels is speciaal voor deze grote samenvatting geschreven maar deels zijn de (crowd) samenvattingen uit VWO 5 en VWO 4 gekopieerd. Omdat het op deze manier gemaakt is er een kans dat er fouten in zitten ondanks dat we deze samenvatting door leraren na hebben laten kijken. Ook zal de schrijfstijl niet overal gelijk zijn.

Het is bedoeld om alle stof van wiskunde B van heel het VWO samen te vatten. Veel simpele dingen worden dan ook nog eens herhaald. Maar gelukkig is er een inhoudsopgave. (tip: klik op het hoofdstuk dat je wilt bekijken)

Voor de inhoudsopgave naast het document (in google docs): Ga naar "Tools"/"Extra" (menu) > "Document outline"/"Document overzicht".

Hartelijk dank aan mevrouw nvt voor het controleren van deze samenvatting.

|                                                  |          |
|--------------------------------------------------|----------|
| <b>Inhoud</b>                                    |          |
| <b>Voorwoord</b>                                 | <b>0</b> |
| <b>Inhoud</b>                                    | <b>1</b> |
| <b>Algebra</b>                                   | <b>4</b> |
| Rekenregels vergelijkingen                       | 4        |
| Rekenregels breuken vergelijkingen               | 4        |
| Rekenregels exponentiële vergelijkingen          | 4        |
| Rekenregels logaritmische vergelijkingen         | 5        |
| Goniometrische rekenregels binnen de eigen soort | 6        |
| Goniometrische rekenregels naar een ander soort  | 7        |
| Oplossen vergelijkingen                          | 8        |
| Lineaire vergelijkingen                          | 8        |
| Kwadratische vergelijkingen                      | 8        |
| Oplossen wortelvergelijkingen                    | 8        |
| Oplossen exponentiële vergelijkingen             | 8        |
| Oplossen hogere machtsvergelijkingen             | 9        |
| Oplossen goniometrische vergelijking             | 9        |
| Bijzondere waardentabel                          | 9        |
| Oplossen stelsel (twee onbekende)                | 10       |
| Translaties                                      | 11       |
| Translatie                                       | 11       |
| Standaard formules en domein/bereik              | 11       |
| Lijn                                             | 11       |
| Parabool                                         | 11       |
| Wortelfunctie                                    | 11       |
| Gebroken functies                                | 12       |
| Exponentiële functies                            | 12       |
| Sinusoïde                                        | 12       |
| Domein en bereik                                 | 13       |
| Differentiëren                                   | 14       |
| Primitiveren                                     | 15       |
| Toppen, buigpunten en soorten hellingen          | 16       |
| Extreme waarden (toppen)                         | 16       |
| Buigpunten                                       | 16       |
| Helling soort                                    | 16       |

|                                                      |           |
|------------------------------------------------------|-----------|
| Omwentel lichamen                                    | 17        |
| Wentelen om de X-as                                  | 17        |
| Wentelen om een grafiek                              | 17        |
| Wentelen om de Y-as                                  | 17        |
| Lengtes lijnstukken                                  | 18        |
| Zwaartepunt                                          | 18        |
| Raaklijnen                                           | 19        |
| Raaklijn aan grafiek door punt op de grafiek         | 19        |
| Raaklijn aan grafiek vanuit een punt niet op grafiek | 19        |
| Loodrecht snijden twee functies                      | 19        |
| Trillingen en lissajous-figuren                      | 20        |
| Fase                                                 | 20        |
| Faseverschillen                                      | 20        |
| Periode combinatie van trillingen                    | 21        |
| Lissajous parametervoorstelling bepalen              | 22        |
| Van parametervoorstelling naar formules              | 22        |
| <b>Figuren en bewijzen</b>                           | <b>23</b> |
| Symmetrie                                            | 23        |
| Punten beschrijven                                   | 23        |
| Vormen                                               | 23        |
| Driehoeken                                           | 24        |
| Vierhoeken                                           | 25        |
| Lijnen en plaatsen                                   | 26        |
| Stellingen                                           | 28        |
| Gelijkvormigheid                                     | 28        |
| Congruentie                                          | 29        |
| Hoekensom                                            | 30        |
| Z- en F-hoeken                                       | 30        |
| Overstaande hoeken                                   | 30        |
| SOSCASTOA                                            | 30        |
| Stelling van Pythagoras                              | 31        |
| (Co)sinusregel                                       | 32        |
| De stelling van de middelpuntshoek                   | 32        |
| De stelling van de constante hoek                    | 32        |
| De stelling van de raaklijn hoek                     | 33        |
| Koordenvierhoek                                      | 33        |
| Boog en koorde                                       | 34        |
| Koorde raaklijn stelling                             | 34        |

|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| <b>Grafische rekenmachine</b> | <b>35</b> |
| Oplossen                      | 35        |
| Decimalen aanpassen           | 35        |
| Polynoom oplossen             | 35        |
| N-solve                       | 35        |
| N-Derivative                  | 35        |
| Bekijken                      | 35        |
| Lissajous Figuren             | 35        |

# Algebra

## Rekenregels vergelijkingen

### Rekenregels breuken vergelijkingen

| Origineel                   | Herleid            |
|-----------------------------|--------------------|
| $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$ | $\frac{AD+BC}{BD}$ |
| $\frac{A}{B} * \frac{C}{D}$ | $\frac{AC}{BD}$    |
| $(\frac{A}{B})^C$           | $\frac{A^C}{B^C}$  |
| $\frac{A}{B/C}$             | $\frac{AC}{B}$     |
| $\frac{A/B}{C}$             | $\frac{A}{BC}$     |

### Rekenregels exponentiële vergelijkingen

De standaard formule is  $f(t) = a * g^t$ :

a = De waarde op het snijpunt met de y-as

g = De groeifactor per t

De groeifactor kun je omrekenen via de volgende formule:

$$G_{oud}^{\frac{\Delta T_{nieuw}}{\Delta T_{oud}}} = G_{nieuw}$$

(LET OP : De tijdseenheden moeten gelijk zijn)

| Origineel         | Herleid         |
|-------------------|-----------------|
| $a^b * a^c$       | $a^{b+c}$       |
| $(a^b)^c$         | $a^{b*c}$       |
| $(a * b)^c$       | $a^c * b^c$     |
| $a^{-b}$          | $\frac{1}{a^b}$ |
| $a^{\frac{c}{b}}$ | $\sqrt[b]{a^c}$ |
| $a^b$             | $e^{b*ln(a)}$   |

### Rekenregels logaritmische vergelijkingen

$$\log_b(a) = c$$

Een log vraagt tot welke macht moet ik  $b$  verheffen om  $a$  te krijgen dus

$$b^c = a$$

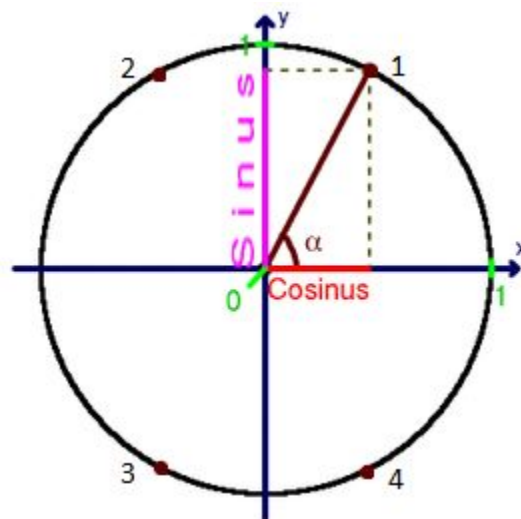
| Origineel               | Herleid                       |
|-------------------------|-------------------------------|
| $\log_a(b) + \log_a(c)$ | $\log_a(b * c)$               |
| $\log_a(b) * c$         | $\log_a(b^c)$                 |
| $\log_a(b)$             | $\frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$ |
| $-\log_a(b)$            | $\log_a(\frac{1}{b})$ (i)     |
| $-\log_a(b)$            | $\log_{\frac{1}{a}}(b)$       |

(i)  $-\log_a(b) = -1 * \log_a(b) = \log_a(b^{-1}) = \log_a(\frac{1}{b})$

### Goniometrische rekenregels binnen de eigen soort<sup>1</sup>

Je kan gemakkelijk een drie (totaal zes) formules bedenken door gemakkelijk een cirkel te tekenen.

De hoek stelt het getal/formule voor dat je in de (co)sinus stopt, de y-as stelt de waarde van een  $\sin(\alpha)$  voor en de x-as de waarde van een  $\cos(\alpha)$ . Door de hoek steeds aan te passen zodat het in alle vier de punten komt kun je bepalen wat de verandering in de hoek is (die inhoud van de (co)sinus) en of het negatief hetzelfde is of positief hetzelfde (dit bepaalt of het plus of min is).



Hieruit krijg je dan:

| Origineel      | Herschreven      |
|----------------|------------------|
| <b>Sinus</b>   |                  |
| $\sin(a)$      | $-\sin(-a)$      |
|                | $\sin(\pi - a)$  |
|                | $-\sin(\pi + a)$ |
| <b>Cosinus</b> |                  |
| $\cos(a)$      | $\cos(-a)$       |
|                | $-\cos(\pi - a)$ |
|                | $-\cos(\pi + a)$ |

<sup>1</sup> Samengevat wiskunde B vwo 2016 <https://goo.gl/mtTvpq>

### Goniometrische rekenregels naar een ander soort<sup>2</sup>

| Origineel                                                                  | Herschreven                                   |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| <b>Herschrijven</b>                                                        |                                               |
| $\sin^2(a) + \cos^2(a)$                                                    | 1                                             |
| $\tan(a)$                                                                  | $\frac{\sin(a)}{\cos(a)}$                     |
| $\sin(a)$                                                                  | $\cos(\frac{1}{2}\pi - a)$                    |
| $\cos(a)$                                                                  | $\sin(\frac{1}{2}\pi - a)$                    |
| $-\sin(a)$                                                                 | $\sin(-a)$                                    |
| <b>Verdubbelingsformules</b>                                               |                                               |
| <b>Af te leiden<sup>3</sup> uit <math>\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1</math></b> |                                               |
| $\cos(2a)$                                                                 | $2\cos^2(a) - 1$                              |
| $\cos(2a)$                                                                 | $1 - 2\sin^2(a)$                              |
| <b>Af te leiden uit somformules:</b>                                       |                                               |
| $\cos(2a)$                                                                 | $\cos^2(a) - \sin^2(a)$                       |
| $\sin(2a)$                                                                 | $2\cos(a) * \sin(a)$                          |
| <b>Somformules (zie voorblad)</b>                                          |                                               |
| $\sin(a + b)$                                                              | $\sin(a) * \cos(b) + \cos(a) * \sin(b)$       |
| $\cos(a + b)$                                                              | $\cos(a) * \cos(b) - \sin(a) * \sin(b)$       |
| <b>Simpson/Mollweide (zie voorblad)</b>                                    |                                               |
| $\sin(a) + \sin(b)$                                                        | $2\cos(\frac{a-b}{2}) * \sin(\frac{a+b}{2})$  |
| $\sin(a) - \sin(b)$                                                        | $2\cos(\frac{a+b}{2}) * \sin(\frac{a-b}{2})$  |
| $\cos(a) + \cos(b)$                                                        | $2\cos(\frac{a-b}{2}) * \cos(\frac{a+b}{2})$  |
| $\cos(a) - \cos(b)$                                                        | $-2\sin(\frac{a+b}{2}) * \sin(\frac{a-b}{2})$ |

<sup>2</sup> Samengevat wiskunde B vwo 2016 <https://goo.gl/mtTvpq>

<sup>3</sup> [https://docs.google.com/document/d/1\\_IFgg2kXxr4d1uW5cG6AHPUN79A7hZSJNogoBoxjo7k/edit](https://docs.google.com/document/d/1_IFgg2kXxr4d1uW5cG6AHPUN79A7hZSJNogoBoxjo7k/edit)

## Oplossen vergelijkingen

### Lineaire vergelijkingen

$$y = ax + b$$

Als je dit ombouwt krijg je:

$$\frac{y-b}{a} = x$$

### Kwadratische vergelijkingen

$$y = ax^2 + bx + c$$

Bij deze vergelijkingen is het iets moeilijker. Sleep eerste alle termen naar een kant. Vervolgens deel je alle termen door  $a$  en herleid je het zodat je een formule krijgt als volgt.

$$0 = x^2 + bx + c$$

Hierbij kan je gaan kwadraat afsplitsen

$$(x + 0,5b)^2 + c - (0,5b)^2 = 0$$

Dit is makkelijk op te lossen door de laatste twee termen naar de ander kant te slepen. Vervolgens beiden kanten te wortelen en dan de  $0,5b$  naar de ander kant te slepen. Hieruit krijg je :

$$x = \pm \sqrt{-c + (0,5b)^2} - 0,5b$$

### Oplossen wortelvergelijkingen

$$y = a\sqrt[k]{x}$$

Isoleer eerst de wortel. En doe dan beiden kanten tot de macht  $b$ . Vervolgens kan nog de inhoud van de wortel opgelost worden. Vergeet hierbij niet te controleren of de oplossing klopt.

$$\left(\frac{y}{a}\right)^b = x$$

### Oplossen exponentiële vergelijkingen

$$y = a * b^x$$

Verplaats eerst  $a$  naar de andere kant. En neem dan de  $\log b$  van  $y/a$ .

$$\log_b\left(\frac{y}{a}\right) = x$$

### Oplossen hogere machtsvergelijkingen

$$y = ax^{2b} + cx^b + d$$

Vervang  $x^b$  door een variabele.

$$y = ap^2 + cp + d$$

Los de vergelijking op voor  $p$ . En stel het antwoord gelijk aan  $x^b$ . Trek hiervan dan vervolgens de  $b$ -ste machtswortel van.

### Oplossen goniometrische vergelijking<sup>4</sup>

Herleid eerst door middel van de goniometrische formules naar

$$\sin(a) = \sin(b) \vee \cos(a) = \cos(b)$$

Bij de sinus geldt:

$$a = b + 2\pi * k$$

of

$$a + b = \pi + 2\pi * k$$

Bij de cosinus geldt:

$$a = b + 2\pi * k$$

of

$$a + b = 0 + 2\pi * k$$

Hierbij staat  $2\pi * k$  voor modulo twee pi (LET OP : deze moet gewoon meegedeeld of vermenigvuldigd worden).

### Bijzondere waardentabel<sup>5</sup>

| hoek $\alpha$ (radialen)       | 0                     | $\frac{1}{6}\pi$      | $\frac{1}{4}\pi$      | $\frac{1}{3}\pi$      | $\frac{1}{2}\pi$      |
|--------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| <b>sin <math>\alpha</math></b> | 0                     | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ |
| <b>cos <math>\alpha</math></b> | $\frac{1}{2}\sqrt{4}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | 0                     |

Onthouden: 0, 6, 4, 3, 2

0, 1, 2, 3, 4

<sup>4</sup> <http://www.hhofstede.nl/modules/goniovergelijkingen.htm> &  
<http://www.hhofstede.nl/modules/goniovergelijkingen3.htm>

<sup>5</sup> <http://www.hhofstede.nl/modules/exactewaardensinus.htm>

### Oplossen stelsel (twee onbekende)

Als er een stelsel is met twee variabelen (bv a en b) kan dan opgelost worden :

- 1 Druk in een vergelijking een variabele uit in de andere (bv a in b).
- 2 Vervang deze variabele (a) in de andere vergelijking met het gevonden antwoord.
- 3 Los deze andere vergelijking op (los b op).
- 3 Vul deze (b) in de originele vergelijking in.
- 4 Los de originele variabele (a) op.

Bijvoorbeeld :

$$/ a + 2b = 3$$

$$\backslash 2a + 3b = 1$$

$$/ a = 3 - 2b$$

$$\backslash 2a + 3b = 1$$

$$/ a = 3 - 2b$$

$$\backslash 2(3 - 2b) + 3b = 1$$

$$/ a = 3 - 2b$$

$$\backslash 6 - b = 1$$

$$/ a = 3 - 2b$$

$$\backslash b = 5$$

$$/ a = 3 - 2 * 5$$

$$\backslash b = 5$$

$$/ a = -7$$

$$\backslash b = 5$$

## Translaties

### Translatie

| Wat                             |                         |
|---------------------------------|-------------------------|
| Verplaatsen tov Y-as met a      | $g(x) = f(x) + a$       |
| Verplaatsen tov X-as met a      | $g(x) = f(x - a)$       |
| Vermenigvuldigen tov X-as met a | $g(x) = a * f(x)$       |
| Vermenigvuldigen tov Y-as met a | $g(x) = f(\frac{x}{a})$ |

## Standaard formules en domein/bereik

### Lijn

De standaardformule :  $y = ax + b$

Hierbij is b de snijpunt met de y as en a de richtingscoëfficiënt

Een lijn heeft een oneindig domein (x) en bereik (y).

### Parabool

De standaardformule :  $y = ax^2 + bx + c$  (x kan een willekeurige formule zijn)

Hierbij is c de snijpunt met de y as.

Een parabool heeft een oneindig domein (x) maar een bereik (y) die niet groter/kleiner kan worden dan de top.

### Wortelfunctie

De standaardformule :  $y = a\sqrt{x} - b$  (x kan een willekeurige formule zijn)

Hierbij is B het minimum/maximum van het bereik (y) en bij x=0 is het minimum/maximum van het domein (x).

### Gebroken functies

De standaardformule :  $y = \frac{t}{n} + c$  (t en n kunnen willekeurige formules zijn)

De y-asymptoot (domein x) is bij  $n=0$ . De x-asymptoot (bereik y) is bij  $y=t/n$  (blijf hiervoor t en n afleiden totdat er geen x meer in voorkomt).

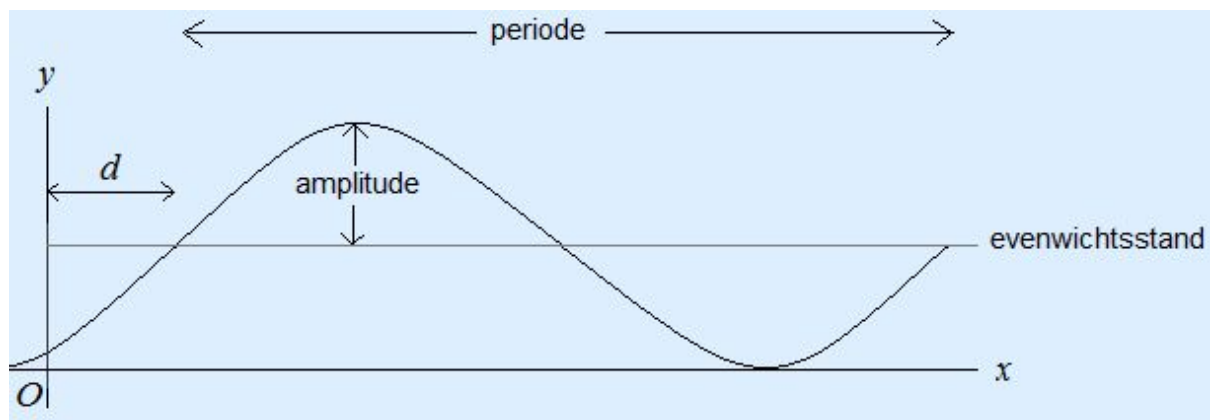
### Exponentiële functies

De standaardformule :  $y = a * n^x + c$  (x kan een willekeurige functie zijn)

Hierbij is a+c de y in  $x=0$ .

Het maximum/minimum van het bereik (y) is c en het domein (x) is oneindig.

### Sinusoïde<sup>6</sup>



De algemene formule van een sinusoïde is:

$$f(x) = a + b \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{c}(x - d)\right)$$

|     |                                                                              |
|-----|------------------------------------------------------------------------------|
| $a$ | evenwichtsstand                                                              |
| $b$ | amplitude                                                                    |
| $c$ | periode                                                                      |
| $d$ | x-coördinaat van een punt waar de grafiek stijgend de evenwichtsstand snijdt |

Een sinus heeft een oneindig domein(x) maar een bereik (y) van de evenwichtsstand plus minus de amplitude.

<sup>6</sup> <http://www.hhofstede.nl/modules/sinusoiden.htm>

### Domein en bereik

Domein zijn de toegestane X-coördinaten.

Bereik zijn de toegestane Y-coördinaten.

| Soort formule         | Domein (X)                     | Bereik (Y)                               |
|-----------------------|--------------------------------|------------------------------------------|
| Lijn                  | Oneindig                       | Oneindig                                 |
| Parabol               | Oneindig                       | Min/max (bij top)                        |
| Wortelfunctie         | Min/max (bij negatieve wortel) | Min/max (bij constante)                  |
| Gebroken functie      | Alles behalve (noemer is nul)  | Alles behalve $(n'/t')^7$                |
| Exponentiële functies | Oneindig                       | min/max (bij constante)                  |
| Sinusoïde             | Oneindig                       | Tussen (evenwichtsstand $\pm$ amplitude) |

LET OP : soms zijn er uitzonderingen.

---

<sup>7</sup> LET OP : niet altijd zo. Soms is er geen y-asymptoot.

## Differentiëren<sup>8</sup>

| Origineel (x bevat een functie met variabele) | Afgeleide                                        |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| <b>Basisregels</b>                            |                                                  |
| $x^n$                                         | $nx^{n-1} * x'$                                  |
| $n^x$                                         | $\ln(n) * n^x * x'$                              |
| $\log_n(x)$                                   | $\frac{x'}{\ln(n)*x}$ (i)                        |
| $\sin(x)$                                     | $\cos(x) * x'$                                   |
| $\cos(x)$                                     | $-\sin(x) * x'$                                  |
| <b>Andere regels</b>                          |                                                  |
| $f(x) + g(x)$                                 | $f'(x) + g'(x)$                                  |
| $f(x) * g(x)$                                 | $f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$                    |
| $\frac{t(x)}{n(x)}$                           | $\frac{n(x)*t'(x)-t(x)*n'(x)}{n(x)^2}$ (nat-tan) |

LET OP : Er is al voor de kettingregel gecompenseerd in deze vergelijkingen

(i)  $f(x) = \log_n(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(n)} = \ln(n)^{-1} * \ln(x)$   
 $f'(x) = [\frac{\ln(x)}{\ln(n)}]' = \ln(n)^{-1} * \frac{1}{x} * x' = \frac{x'}{x*\ln(n)}$

<sup>8</sup> Samengevat wiskunde B vwo 2016 <http://bit.ly/2fyVycD>

## Primitiveren<sup>9</sup>

| Origineel (x bevat de functie)  | Primitief                                                  |
|---------------------------------|------------------------------------------------------------|
| <b>Basisregels<sup>10</sup></b> |                                                            |
| $x^n$                           | $\frac{1}{(n+1)*x'} * x^{n+1} + c$                         |
| $n^x$                           | $\frac{1}{x'*\ln(n)} * n^x + c$                            |
| $\log_n(x)$                     | $\frac{x*\ln(x)-x}{\ln(n)*x'} + c$ <b>(i)<sup>11</sup></b> |
| $\sin(x)$                       | $-\frac{1}{x'}\cos(x) + c$                                 |
| $\cos(x)$                       | $\frac{1}{a'}\sin(x) + c$                                  |
| <b>Speciale gevallen</b>        |                                                            |
| $\cos^2(ax + b)$                | $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2a}\sin(2ax + 2b) + c$            |
| $\sin^2(ax + b)$                | $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2a}\sin(2ax + 2b) + c$            |

LET OP : Vergeet niet er  $+c$  achter te stoppen.

|   |   |
|---|---|
| - | + |
| + | - |

LET OP: Bij het primitiveren wordt oppervlakte soms als negatief gezien (zie plaatje). Bereken de x-coördinaten uit van de snijpunten en gebruik absoluutstrepen waar nodig.

<sup>9</sup> Samengevat wiskunde B vwo 2016 <http://bit.ly/2fyQAMU>

<sup>10</sup> Ezelbruggetjes exponentiële vergelijkingen : <http://bit.ly/2mIF9dX>

<sup>11</sup> Bewijs : <https://drive.google.com/open?id=1rVFp3EdMUa6OKftpmgHMk2NT7geNhl5O73fsI3p6nXY>

## Toppen, buigpunten en soorten hellingen

### Extreme waarden (toppen)

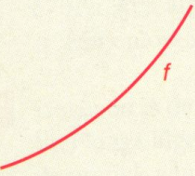
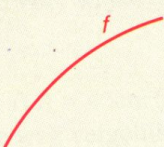
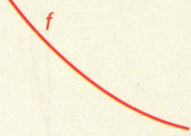
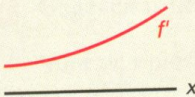
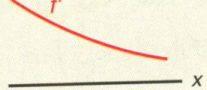
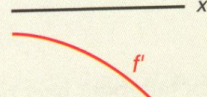
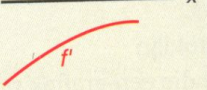
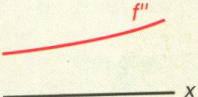
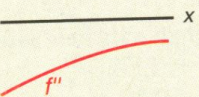
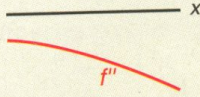
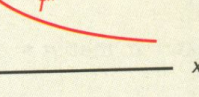
Je kan de x-coördinaat van een top vinden door de afgeleiden op nul te zetten en de x te vinden. Vervolgens kan je de y-coördinaat vinden door de x-coördinaat in de originele functie te zetten.

### Buigpunten

Je kan de x-coördinaat van een buigpunt vinden door de tweede afgeleide op nul te zetten. Vervolgens kan je de y-coördinaat vinden door het in de originele functie te zetten.

### Helling soort

|           | $f' > 0$           | $f' < 0$         |
|-----------|--------------------|------------------|
| $f'' > 0$ | Toenemend stijgend | Afnemend dalend  |
| $f'' < 0$ | Afnemend stijgend  | Toenemend dalend |

| toenemend stijgend                                                                  | afnemend stijgend                                                                   | toenemend dalend                                                                     | afnemend dalend                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
| $f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$                                                       | $f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$                                                       | $f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$                                                        | $f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$                                                         |

## Omwentel lichamen

### Wentelen om de X-as

Om de X as heen wentelen is simpel. Je neemt gewoon de primitief (of integraal) van de functie in het kwadraat keer pi.

$$\pi * \int_a^b (f(x))^2 dx$$

### Wentelen om een grafiek

Wentelen om een andere grafiek is net zo simpel. Je rekent eerste gewoon de delta uit en daarna doe je die in het kwadraat en keer pi en daar neem je dan de primitief (of integraal) van.

$$\pi * \int_a^b ((f(x) - g(x))^2) dx$$

### Wentelen om de Y-as

1) Druk x uit in y

2)  $\pi * \int_a^b (f(y))^2 * dy$  (hierbij zijn a en b dus twee y-coördinaten waartussen je je vorm wilt hebben.)

VB:

Wentel deze formule om de y-as tussen y=1 en y=5:  $f(x) = -2(x-5)^2 + 3$

$$y = -2(x-5)^2 + 3$$

$$y - 3 = -2(x-5)^2$$

$$-0,5(y-3) = (x-5)^2$$

$$\sqrt{-0,5(y-3)} = x-5$$

$$\sqrt{-0,5(y-3)} + 5 = x$$

$$\pi * \int_1^5 (\sqrt{-0,5(y-3)} + 5)^2 * dy$$

### Lengtes lijnstukken

Om de lengte van een grafiek uit te rekenen pas je de volgende formule toe

$$L = \int_a^b (\sqrt{1 + (f'(x))^2} * dx)$$

### Zwaartepunt

Voor een zwaartepunt van een oppervlakte (en omwentelingslichaam) geldt:

$$x - \text{coördinaat} = \frac{\int_a^b x * f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

LET OP: bij een omwentelingslichaam moet de functie van de integraal in het kwadraat (en keer pi).

## Raaklijnen

Twee functies raken elkaar als geldt:

- 1)  $f(x) = g(x)$
- 2)  $f'(x) = g'(x)$

### Raaklijn aan grafiek door punt op de grafiek

Zodra je de punt op de grafiek hebt kun je deze formule gebruiken. Voor een raaklijn  $(g(x))$  aan de grafiek  $(f(x))$  in punt  $(a, b)$  geldt.

$$g(x) = f'(a) * (x - a) + b$$

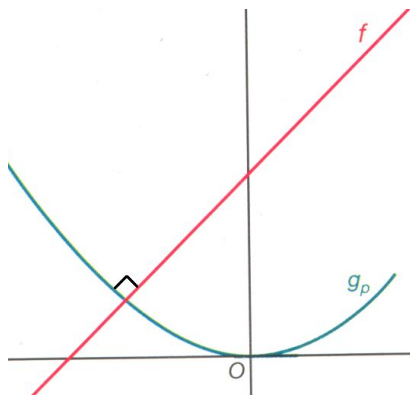
### Raaklijn aan grafiek vanuit een punt niet op grafiek

- 1) Stel de formule van de raaklijn op met transformatie vanuit het punt  $(b, c)$ :
  - $g(x) = a(x - b) + c$
- 2) Los het stelsel op:  $f(x) = g(x)$  en  $f'(x) = a$
- 3) Formule raaklijn afmaken:  
Vul de uitgerekende  $a$  in.

### Loodrecht snijden twee functies

Twee lijnen snijden elkaar loodrecht als:

$$f(x) = g(x) \wedge f'(x) * g'(x) = -1$$



## Trillingen en lissajous-figuren

### Fase

Fase geeft aan hoever een trilling door de gehele trilling door is. Dit wordt aangegeven in aantal trillingen.

De volgende algemene formule van geldt dan.

$$\sin(ax + b)$$

$$f = \frac{a \cdot x}{2\pi}$$

Vaak moet gelden :  $0 \leq f < 1$

In dat geval moet je gewoon alleen de decimalen laten staan.

### Faseverschillen

Als twee trillingen dezelfde frequentie hebben kan een faseverschil uitgerekend worden.

Herschrijf eerst de formules als volgt

$$\sin(ax + b)$$

$$\sin(a * (x + \frac{b}{a}))$$

Reken vervolgens het verschil uit tussen de twee

$$\Delta f = \frac{b_2}{2\pi a_2} - \frac{b_1}{2\pi a_1}$$

### Periode combinatie van trillingen

Als twee sinusoides met verschillende trillingen bij elkaar opgeteld worden krijg je niet een nieuwe trilling maar de resulterende functie is wel periodiek.

$$f(x) = \sin(ax + b) + \sin(bx + b) + \sin(\dots)$$

Bepaal de periode van alle termen. Zoek hiervan de kleinste gemeenschappelijke periode.

De grootste gemeenschappelijke veelvoud kan worden omgezet naar de kleinste gemeenschappelijke veelvoud.

$$kgv(a, b) = \frac{a*b}{ggv(a, b)}$$

Bijvoorbeeld :

$$f(x) = \sin(3x - 4) + \sin(5x + 7)$$

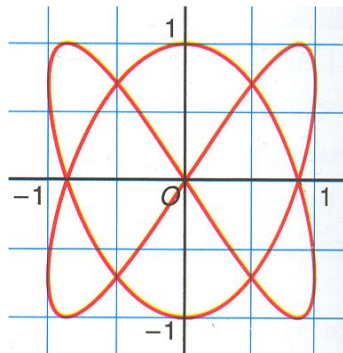
$$\text{Periode eerste term : } \frac{3}{2\pi}$$

$$\text{Periode tweede term : } \frac{5}{2\pi}$$

Kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 3 en 5 is  $\frac{3*5}{1} = 15$ .

Dus de gemeenschappelijke periode is  $\frac{15}{2\pi}$

### Lissajous parametervoorstelling bepalen



De standaardformule voor een normale parametervoorstelling is :

$$x = a * \sin(bt)$$

$$y = c * \sin(dt)$$

Waarin :

- $a$  De maximale uitwijking op de x as.
- $b$  Het aantal keer dat het figuur de y-as snijdt gedeeld door twee.
- $c$  De maximale uitwijking op de y as.
- $d$  Het aantal keer dat het figuur de x-as snijdt gedeeld door twee.

Als er binnen de sinusoides een tweede term komt moet je op basis van andere eigenschappen van de tekeningen (snijpunten) afleiden welke waarde die hebben.

### Van parametervoorstelling naar formules

Om een formule te bepalen bij een parametervoorstelling moet de formule tekenen en daarbij een formule verzinnen. Als je een formule krijgt dan moet je gaan substitueren en herleiden.

## Figuren en bewijzen

### Symmetrie

| Symmetrie                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Als <math>f(a - p) = f(a + p)</math> dan lijnsymmetrisch op lijn <math>x = a</math></i>  |
| <i>Als <math>f(a - p) + f(a + p) = 2b</math> dan puntsymmetrisch in <math>(a, b)</math></i> |

### Punten beschrijven

Een punt schrijf je met een hoofdletter en een lijn met een kleine letter.

Een punt kan worden beschreven als een coördinaat maar een groep punten (bijvoorbeeld een lijn) kan worden beschreven op de volgende manier

Voor  $l = \Sigma P$ :

$$d(P, a) = d(P, b)$$

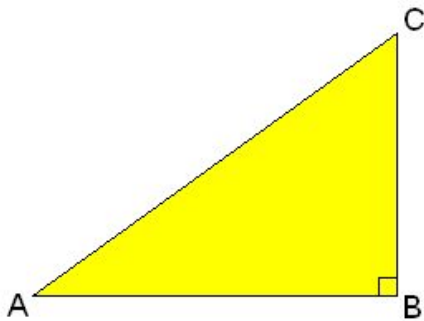
Wat je hier zegt is:

Voor de lijn,  $l$ , die gelijk is aan de alle punten,  $P$ , geldt:

De afstand van  $P$  naar  $a$  is gelijk aan de afstand van  $P$  naar  $b$ .

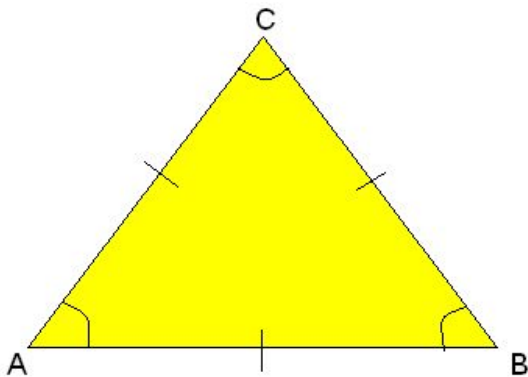
## Vormen

### Driehoeken<sup>12</sup>



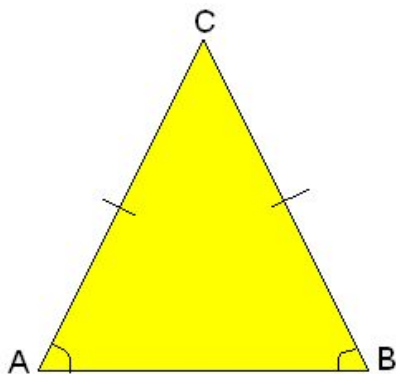
Rechthoekige driehoeken:

- Een hoek is precies 90 graden



Gelijkzijdige driehoeken:

- Elke hoek is 60 graden
- Alle zijden zijn even lang



Gelijkbenige driehoek:

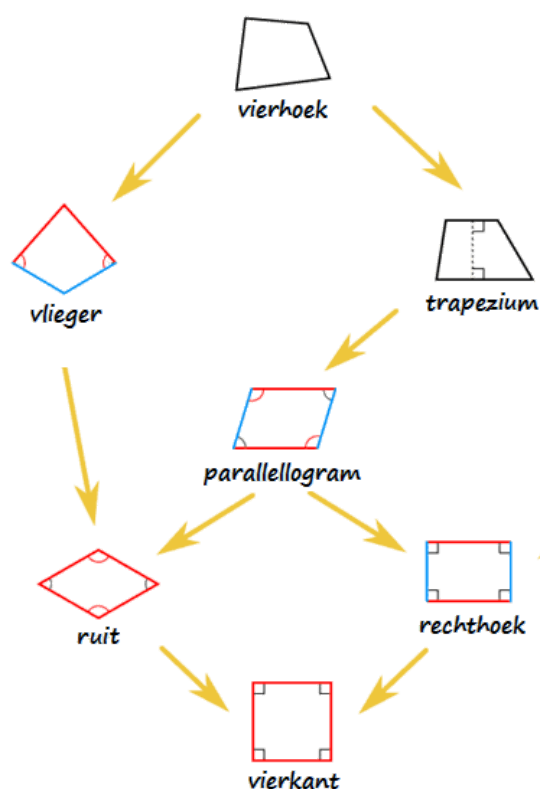
- Twee gelijke hoeken
- Twee gelijke zijden

---

<sup>12</sup> <http://www.wiskunde123.nl/?a=driehoeken>

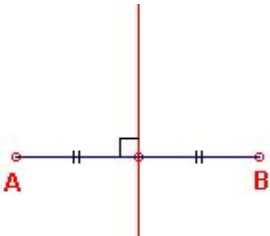
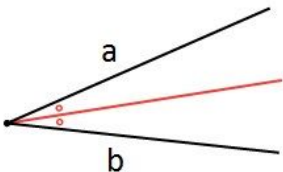
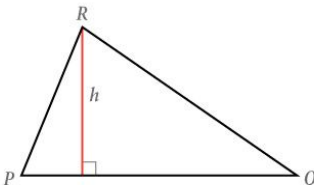
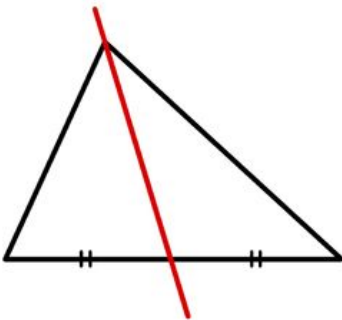
## Vierhoeken

| Vorm          | Eigenschappen <sup>13</sup>                                                                                                |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Vierhoek      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Vier hoeken</li> <li>• Vier zijden</li> </ul>                                     |
| Vlieger       | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Twee gelijke hoeken</li> <li>• Twee paren van gelijke zijden</li> </ul>           |
| Trapezium     | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Vier hoeken</li> <li>• Twee parallel lopende zijden</li> </ul>                    |
| Parallelogram | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Twee paren van gelijke hoeken</li> <li>• Twee paren van gelijke zijden</li> </ul> |
| Ruit          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Twee paren van gelijke hoeken</li> <li>• Vier gelijke zijden</li> </ul>           |
| Rechthoek     | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Vier gelijke hoeken</li> <li>• Twee paren van gelijke zijden</li> </ul>           |
| Vierkant      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Vier gelijke hoeken</li> <li>• Vier gelijke zijden</li> </ul>                     |

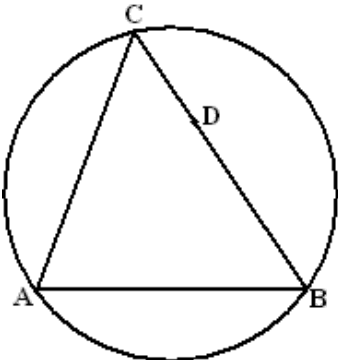
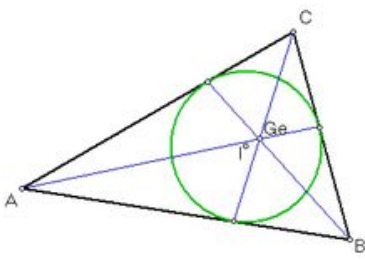
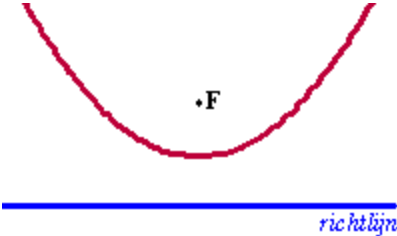


<sup>13</sup> Leuke extra bron : <http://www.dr-aart.nl/Meetkunde-vierhoeken.html>

## Lijnen en plaatsen

| Lijn of vorm <sup>14</sup>                                                                              | Definitie                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Middelloodlijn</p>  | <p>Een lijn die een lijn in twee gelijke stukken deelt en op 90 graden snijdt.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Middelpunt van de omschreven cirkel.</li> <li>- <math>d(P, A) = d(P, B)</math>.</li> </ul>                                     |
| <p>Bissectrice</p>     | <p>Een lijn die een hoek in twee deelt.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 2 gelijke hoeken.</li> <li>- Middelpunten van de ingeschreven cirkel.</li> <li>- <math>d(P, a) = d(P, b)</math>.</li> </ul>                                           |
| <p>Hoogtelijn</p>     | <p>Een loodlijn die uit een hoek komt.</p>                                                                                                                                                                                                                 |
| <p>Zwaartelijn</p>   | <p>Een lijn vanuit een hoek die de overstaande zijden in twee deelt.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Oppervlakte aan beiden kanten gelijk.</li> <li>- Verdelen elkaar in stukken die zich verhouden tot 2:1 (bij 2 zwaartelijnen).</li> </ul> |
| Koordenvierhoek                                                                                         | Een vierhoek met de hoeken in een omschreven cirkel.                                                                                                                                                                                                       |
| Cirkel                                                                                                  | Alle punten die even ver van het middelpunt zijn.                                                                                                                                                                                                          |
| Raaklijn aan cirkel                                                                                     | Deelt een punt met de cirkel en staat 90 graden op de cirkel.                                                                                                                                                                                              |

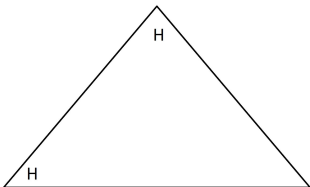
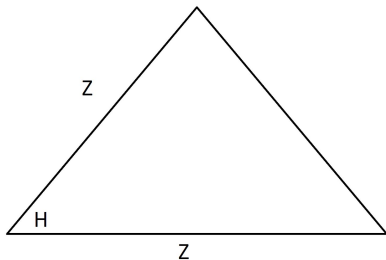
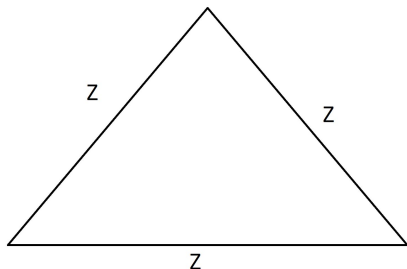
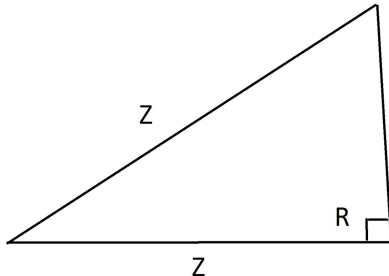
<sup>14</sup> <http://www.hhofstede.nl/modules/lijnenindriehoeken.htm>

|                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Omgeschreven cirkel</p>  | <p>Een cirkel die alle hoekpunten raakt. Het midden is de snijpunt van de middelloodlijnen.</p>                                                                                                                                                           |
| <p>Ingeschreven cirkel</p>  | <p>Een cirkel die alle zijden raakt. Het midden is de snijpunt van de bissectrices.</p>                                                                                                                                                                   |
| <p>Parabool</p>           | <p>Een parabool heeft een focus en een richtlijn:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <math>d(P, F) = d(P, r)</math>.</li> <li>- De raaklijn is de bissectrice van hoek FPr.</li> <li>- De raaklijn is de middelloodlijn van lijn Fr.</li> </ul> |

## Stellingen<sup>15</sup>

### Gelijkvormigheid

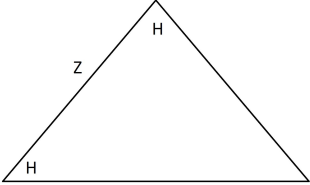
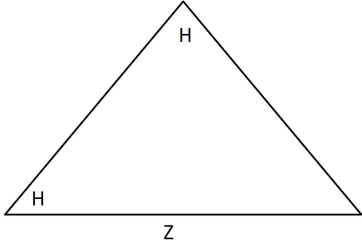
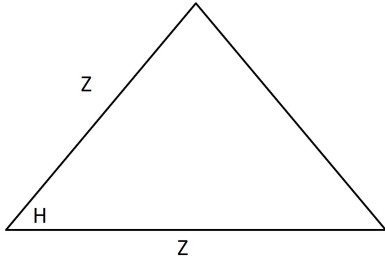
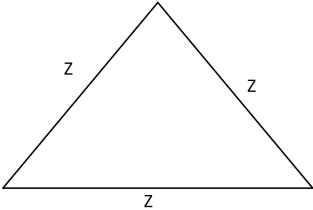
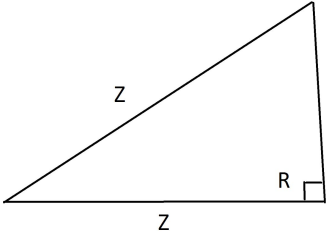
$\hookrightarrow$  = gelijkvormig (dezelfde hoeken)

| Bewijs                                                                                    | Voorbeeld                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| hh:<br>Twee hoeken.                                                                       |     |
| zhz:<br>Een hoek en (de verhouding van) de aanliggende zijden.                            |   |
| zzz:<br>(De verhouding van) de drie zijden.                                               |  |
| zzr:<br>Een rechte hoek en (de verhouding van) een aanliggende en een overstaande zijden. |  |

<sup>15</sup> Samengevat wiskundeB vwo 2016 <http://bit.ly/2esdb86>

### Congruentie

$\cong$  = congruent (dezelfde zijden en hoeken)

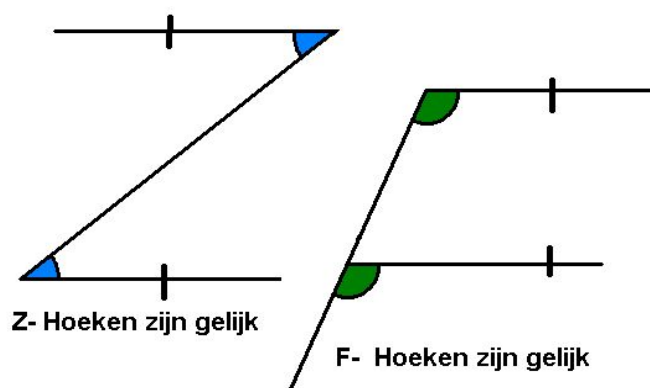
| Bewijs                                                                      | Voorbeeld                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| HZH:<br>Twee hoeken en de<br>tussenliggende zijden.                         |     |
| ZHH:<br>Twee hoeken en een<br>overstaande zijden.                           |    |
| ZHZ:<br>Een hoek en de aanliggende<br>zijden.                               |  |
| ZZZ:<br>De drie zijden.                                                     |   |
| ZZR:<br>Een rechte hoek en een<br>aanliggende en een<br>overstaande zijden. |  |

### Hoekensom<sup>16</sup>

De som van alle hoeken in een figuur. Een formule hiervoor is  $n * 180 - 360$ .

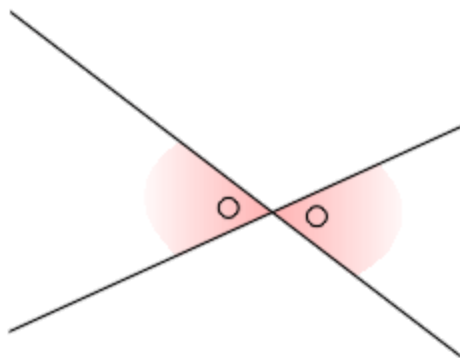
| Figuur   | Hoekensom |
|----------|-----------|
| Driehoek | 180       |
| Vierhoek | 360       |
| Vijfhoek | 540       |
| Zeshoek  | 720       |

### Z- en F-hoeken



Als twee lijnen parallel lopen zijn de hoeken met een derde lijn gelijk. Door de eigenschappen van een gestrekte hoek zijn de twee binnenste hoeken ook gelijk.

### Overstaande hoeken



Overstaande hoeken zijn gelijk.

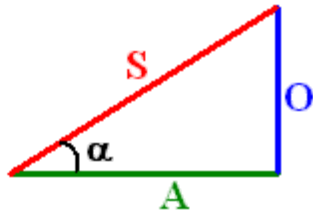
<sup>16</sup> [https://nl.wikipedia.org/wiki/Regelmatige\\_veelhoek](https://nl.wikipedia.org/wiki/Regelmatige_veelhoek)

### SOSCASTOA

$$\sin(\alpha) = \frac{O}{S}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{A}{S}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{O}{A}$$

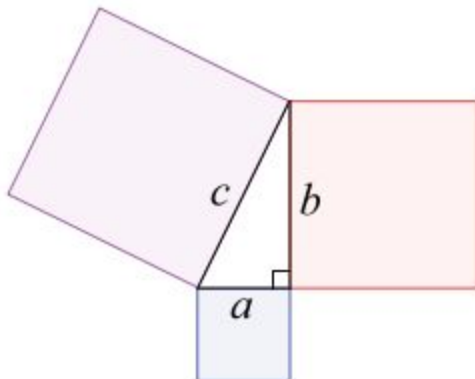


LET OP : Hiervoor moet de hoek tussen A en O 90 graden zijn. Gebruik anders de (co)sinusregel.

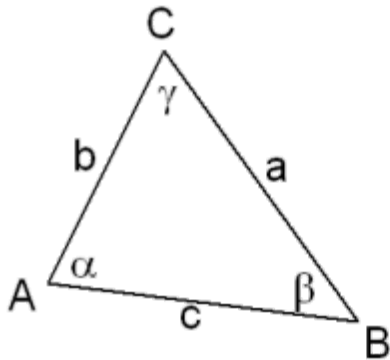
### Stelling van Pythagoras

Volgens Pythagoras is er een verband bij een rechthoekige driehoek tussen de zijdes.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



### (Co)sinusregel



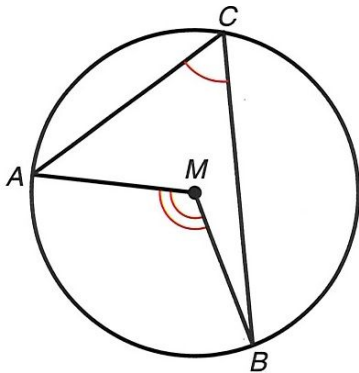
Sinusregel:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Cosinusregel:

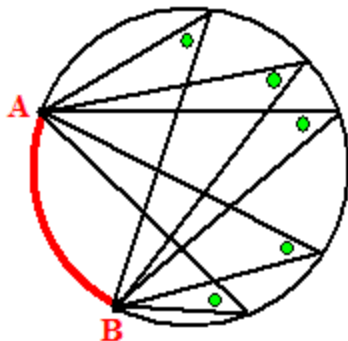
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab * \cos(\gamma)$$

### De stelling van de middelpuntshoek



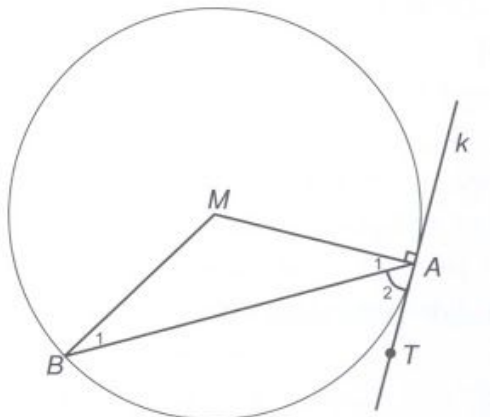
De omtrekshoek (op de cirkel) is altijd de helft van de middelpuntshoek. Hieruit blijkt ook de stelling van Thales (bij een rechte lijn door het midden is de hoek 90 graden).

### De stelling van de constante hoek



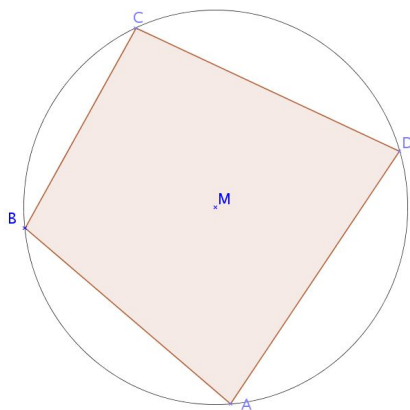
Alle omtrekshoeken die vanuit dezelfde twee punten op een cirkel komen zijn gelijk.

### De stelling van de raaklijn hoek<sup>17</sup>



Bij twee punten op een cirkel en een raaklijn is de hoek A2 is de helft van de middelpuntshoek (hoek M).

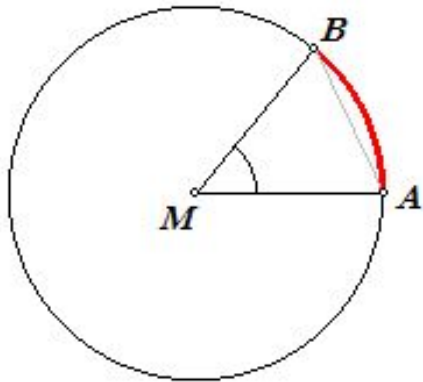
### Koorden vierhoek



Een koorde vierhoek is een vierhoek met een omgeschreven cirkel. De overstaande hoeken zijn samen 180 graden. Dus  $CBA + CDA = 180$  en  $BCD + BAD = 180$

<sup>17</sup> Samengevat wiskundeB vwo 2016 <http://bit.ly/2escrjr>

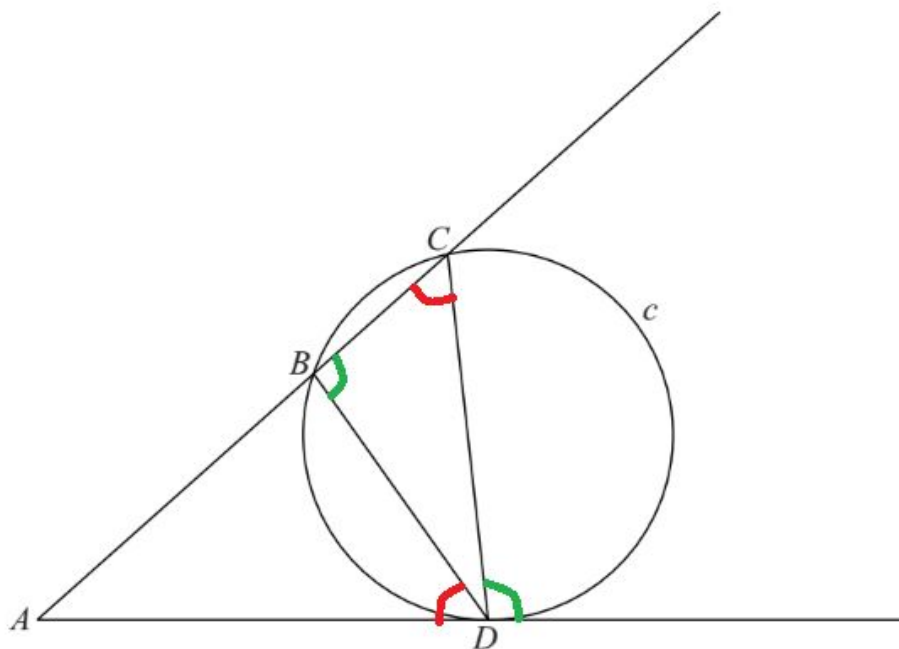
### Boog en koorde



Als de boog (lijnstuk op cirkel) gelijk is dan is de koorde (lijnstuk AB) even lang.

### Koorde raaklijn stelling

Bij een raaklijn op een cirkel met daaruit een koorde dan zijn de hoeken gelijk.



# Grafische rekenmachine

## Oplossen

### Decimalen aanpassen

Ga in scratchpad (grafisch) naar :

Menu->(8)Instellingen

Verander hier 'Cijfers weergeven' naar het gewenst aantal decimalen.

### Polynoom oplossen

Ga in scratchpad (numeriek) naar :

Menu->(3)Algebra->(3)Polynoom-tools->(1)Wortels van polynoom zoeken

Stel vervolgens een hoeveelste graad vergelijking het is in (maximale hoeveelheid van een macht)

Hierna vul je alles in en krijg je het antwoord.

### N-solve

Voor het oplossen van vergelijkingen

$nSolve(funcitie = functie, var)$

Var kan gelijkgesteld worden aan een inschatting.

LET OP: deze functie returned maar EEN waarde.

Bijvoorbeeld :

$nSolve(2x - 5^x = 2x^2, x)$

### N-Derivative

Geeft de afgeleide

$nDerivative(funcitie, var)$

Var kan gelijkgesteld worden aan een getal om de rc op die plek te krijgen.

Bijvoorbeeld

$nDerivative(-5x^3 + 3x, x = 4)$

Deze functie werkt ook in een grafiek.

## Bekijken

### Lissajous Figuren

Ga in scratchpad (grafisch) naar :

Menu->(3)Grafiek invoeren/bewerken->(3)Parametervoorstelling

Vul dan de functies voor de X en Y in en geef aan hoelang hij door moet gaan met welke stapgrootte.