

3 Drie dimensies, afstanden en hoeken

Perspectief

De straattekening op de foto is een voorbeeld van een anamorfose. De tekening is zo gemaakt dat vanaf een bepaald punt het lijkt alsof er een gat in het trottoir zit. Zo'n tekening maken is nog niet zo eenvoudig. Je maakt gebruik van de regels van perspectieftekenen, maar dan net even anders.

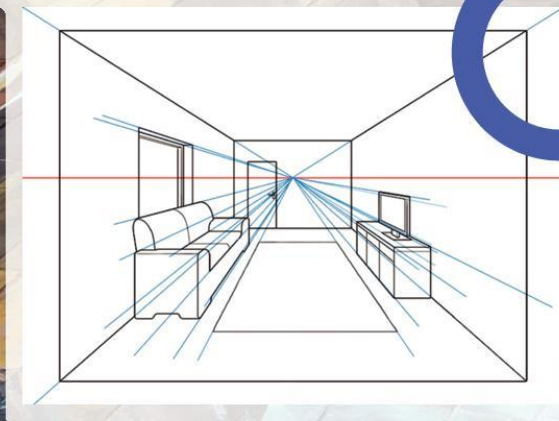
In de onderzoeksoopdracht ga je zelf een tekening met perspectief maken.

In dit hoofdstuk leer je werken met perspectief. Daarom is het belangrijk dat je eerst het hoofdstuk leert en maakt.

Wat leer je?

- Tekenen in perspectief.
- Werken in een driedimensionaal assenstelsel.
- Zijden en hoeken berekenen met symmetrie, goniometrie en Pythagoras.
- [VMBO-GT] Lichaamsdiagonaal berekenen.
- Hellingspercentage berekenen.

3

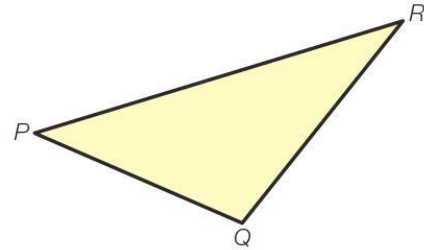




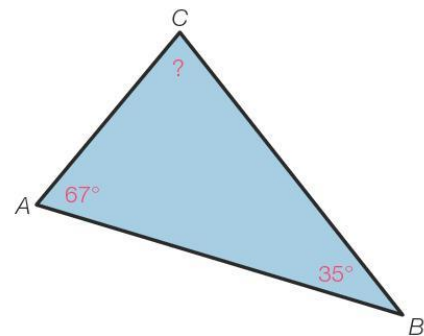
Voorkennis Hoeken en goniometrie

Hoeken berekenen in driehoeken

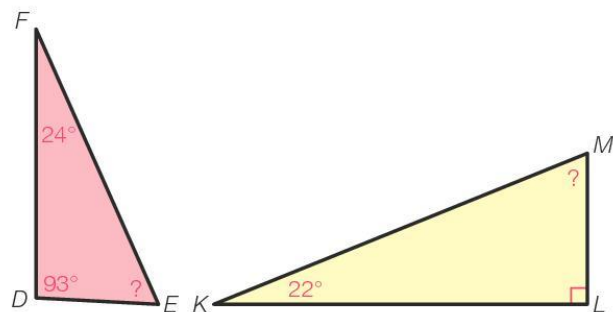
- 1** **a** Meet de hoeken van $\triangle PQR$.
b Tel de hoeken bij elkaar op. Zijn ze samen 180° ? Dan heb je goed gemeten.



- 2** De drie hoeken van een driehoek zijn samen altijd 180° .
Vul in en bereken.
 $\angle C = 180 - \dots - \dots = \dots^\circ$

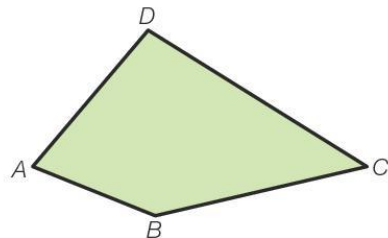


- 3** Bereken de hoeken met het vraagteken.
Schrijf de berekeningen op.

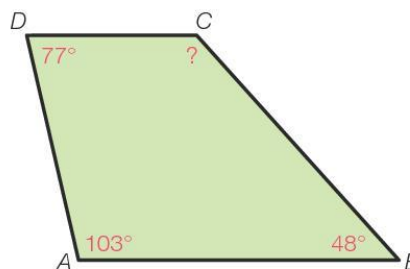


Hoeken berekenen in vierhoeken

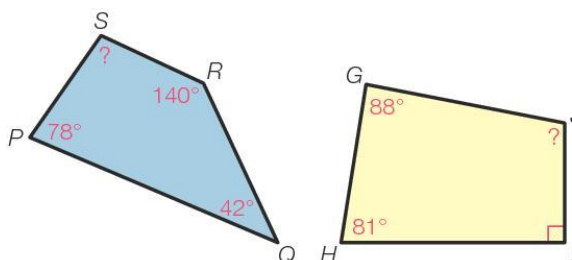
- 4** [**WERKBOEK**] Hiernaast zie je vierhoek $ABCD$.
a Teken diagonaal AC . Je krijgt nu twee driehoeken.
b Hoeveel graden zijn de hoeken van $\triangle ABC$ samen? En hoeveel graden zijn de hoeken van $\triangle ACD$ samen?
c Hoeveel graden zijn de hoeken van de twee driehoeken samen?
d Hoeveel graden zijn de hoeken van de vierhoek $ABCD$ samen?



- 5 De hoeken van een vierhoek zijn samen altijd 360° .
Vul in en bereken.
 $\angle C = 360 - \dots - \dots - \dots = \dots^\circ$



- 6 Bereken de hoeken met het vraagteken.
Schrijf de berekeningen op.



Goniometrie

Met sinus, cosinus en tangens kun je zijden en hoeken berekenen in een rechthoekige driehoek.

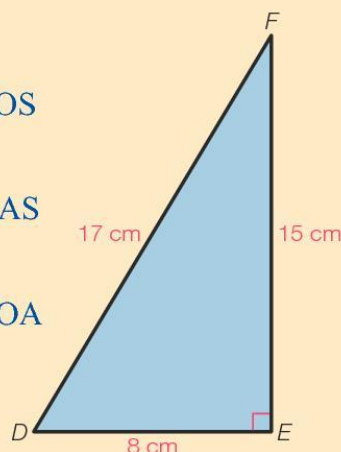
Bij $\angle D$ in driehoek DEF horen drie verhoudingen.

$$\sin \angle D = \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} = \frac{EF}{DF} = \frac{15}{17} \quad \text{SOS}$$

$$\cos \angle D = \frac{\text{Aanliggende rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} = \frac{DE}{DF} = \frac{8}{17} \quad \text{CAS}$$

$$\tan \angle D = \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{EF}{DE} = \frac{15}{8} \quad \text{TOA}$$

Dit kun je onthouden met het ezelsbruggetje SOSCASTOA.



- 7 [WERKBOEK] Vul de juiste woorden achter de letters van SOSCASTOA in.

- 8 Vul in.

a $\tan \angle K = \frac{LM}{KM} = \frac{12}{\dots}$

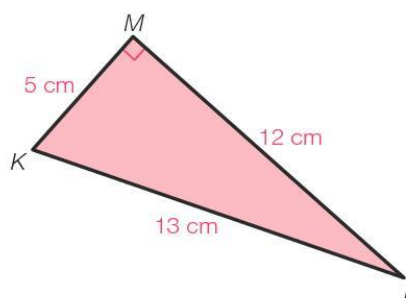
d $\tan \angle L = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

b $\sin \angle K = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

e $\sin \angle L = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

c $\cos \angle K = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

f $\cos \angle L = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$



3.1 Teken en in perspectief

Langer en korter

1
□ ⊙ *

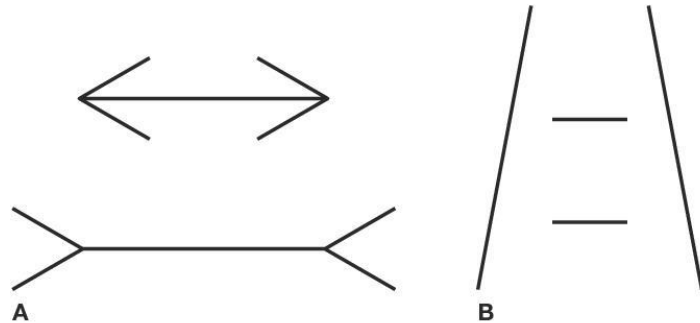
- a Bekijk de twee horizontale lijnstukken van tekening A. Welke lijkt het langst?

- b Bekijk de horizontale lijnstukken van tekening B.

Welke lijkt het langst?

- c Meet de horizontale lijnstukken van tekening A. Welke is langer?

- d Meet de horizontale lijnstukken van tekening B. Welke is langer?



Groter en kleiner

2
□ ⊙ *

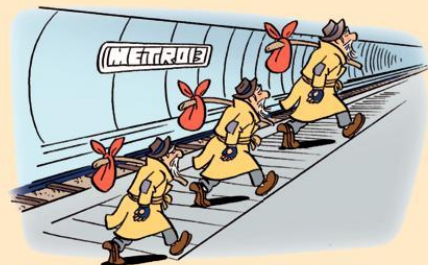
- a Op de weg lopen twee mannen. Welke lijkt het grootst?

- b Meet de mannen op. Welke is het grootst?



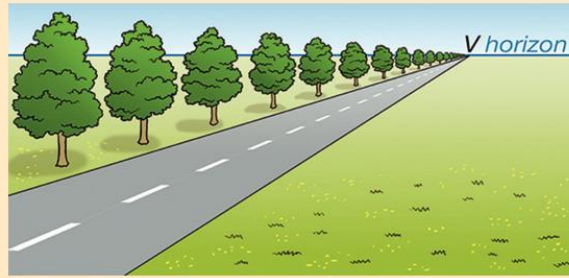
Theorie A Teken en in perspectief

Als je de personen op de tekening meet, zijn ze even groot. Toch ervaar je ze niet als even groot. Dat komt omdat je door de getekende omgeving de indruk krijgt, dat de één verder weg is dan de ander.



Bij tekeningen in **perspectief** wordt alles wat verder weg is kleiner getekend. Daardoor lijkt zo'n tekening veel op de werkelijkheid. De weg waarop de personen lopen is in perspectief getekend, maar de personen niet. Daardoor lijkt het alsof de persoon rechts groter is dan de andere twee.

De zijkanten en de middenstreep van de weg hiernaast zijn in werkelijkheid evenwijdig aan elkaar. Op de tekening zijn ze dat niet. Ze snijden elkaar in punt *V*. Dat punt *V* ligt op de horizontale blauwe lijn. Die lijn is de **horizon**.



De weg verdwijnt achter de horizon bij dat punt *V*. Daarom heet dat punt het **verdwijnpunt**.

De weg is op de tekening achteraan smaller dan op de voorgrond. Uit ervaring weten we dat een weg overal even breed is. Daarom zien we die ook zo.

Perspectieftekeningen met één verdwijnpunt noemen we **éénpuntperspectief**.

Misschien leerde je in de tekenlessen wel tekenen in tweepuntperspectief.



Tekenen in perspectief:

perspectiefregel 1

Evenwijdige lijnen die van je af lopen snijden elkaar in het verdwijnpunt op de horizon.

perspectiefregel 2

Verticale lijnen zijn ook in de tekening verticaal.

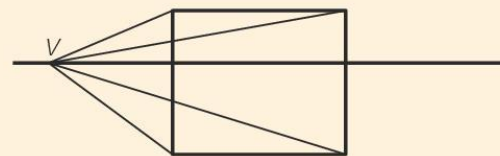
Voorbeeld Balk in perspectief tekenen

Opgave

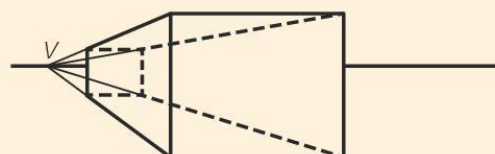
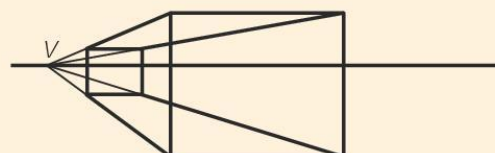
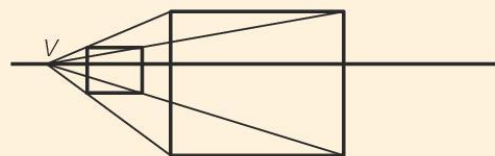
Teken een balk in perspectief.

Aanpak

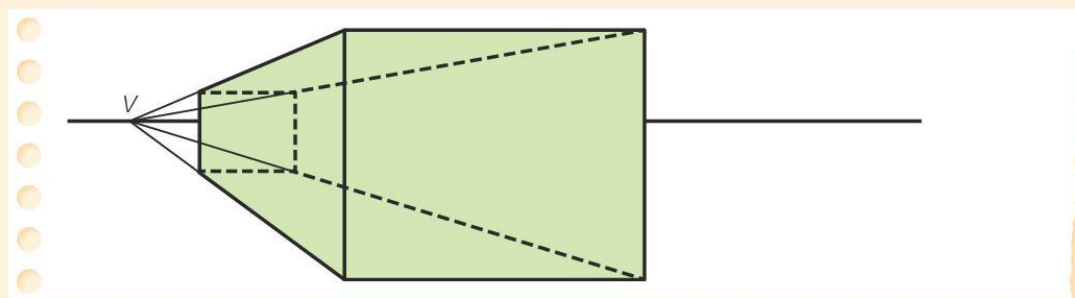
- Begin met het tekenen van een horizon met daarop een verdwijnpunt.
- Teken door de horizon de voorkant van de balk als rechthoek.
- Trek vanaf elk hoekpunt dunne lijnen naar het verdwijnpunt. Dit zijn de **vluchtlijnen**.



- Teken verder naar de horizon de achterkant van de balk. Teken de hoekpunten op de vier vluchtlijnen. De achterkant wordt daardoor kleiner dan de voorkant.
- Verbind de voorkant en de achterkant met elkaar door de vluchtlijnen gedeeltelijk dikker te maken.
- Je hebt nu een balk in perspectief getekend.
- Maak van de lijnen die je niet ziet als de balk ondoorzichtig zou zijn stippellijnen.
- Gum het gedeelte van de horizon dat achter de balk ligt uit.
- Kleur de balk licht in.



Uitwerking



Kubus in perspectief

**Test
opgave**

Teken een kubus in perspectief.

Weg

3

[> **WERKBOEK**] In je werkboek is het begin van een weg getekend. Je vindt het verdwijnpunt door de zijkanten langer te maken.

- Teken de zijkanten van de weg.
- Zet de letter *V* bij het snijpunt van de twee lijnen.
- Teken een horizontale lijn door het punt *V*. Zet erbij *horizon*.

4
☐ ⊙ *

[> **WERKBOEK**] Je gaat een weg tekenen in perspectief.

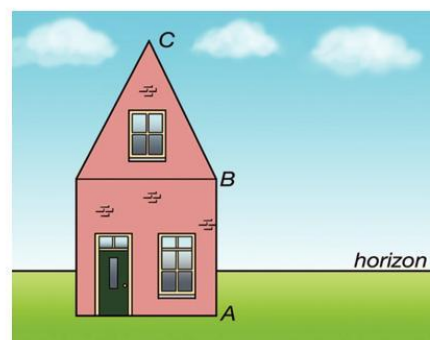
- Teken de rechterkant van de weg, dus een lijn naar V .
- Teken de linkerkant van de weg, ook naar V .
Lijkt het op een weg?
- Rechts van de weg staat een geluidsscherm.
Teken van de bovenkant en de onderkant van het geluidsscherm een lijn naar het verdwijnpunt.
- Je kunt niet door het geluidsscherm heen kijken. Gum het gedeelte van de tekening dat je niet kunt zien weg.
- Kleur het geluidsscherm.
- Teken de middenstreep op de weg.

Huis

5
☐ ⊙ *

[> **WERKBOEK**] Je ziet de voorgevel van een huis en de horizon. Je gaat het huis afmaken in perspectief. Volg het stappenplan hieronder:

- Kies een verdwijnpunt op de horizon, 4 cm rechts van punt A .
- Trek vanuit A , B en C vluchtlijnen naar het verdwijnpunt.
- Teken nu de zijkant van het huis tussen de vluchtlijnen. De daklijnen lopen evenwijdig aan elkaar.



6
☐ ⊙ *

De bewoners van dit huis hebben een garage met auto op hun muur geschilderd. Op het eerste gezicht lijkt het net echt. Welke wanden van de garage zie je? Kies uit: *linkerzijwand*, *rechterzijwand*, *achterwand*, *vloer*, *plafond*, *garagedeur*.



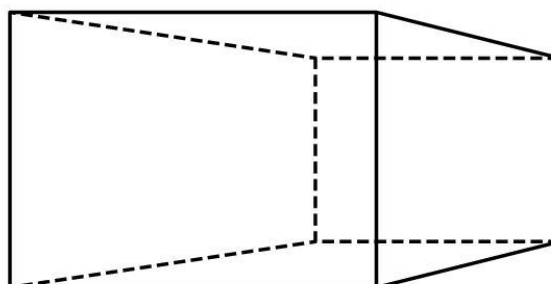
Balk

7
☐ ⊙ *

- [> **WERKBOEK**] Teken de vluchtlijnen en vind zo het verdwijnpunt.
- Teken de horizon.

8
*

Teken een balk waarvan de hoogte groter is dan de lengte en de breedte. Zorg voor perspectief. Gum als de balk af is alle vluchtlijnen en de horizon weg.



Soorten perspectief

Landschappen en gebouwen teken je in perspectief. De horizon is dan op ooghoogte. Als je staat is je ooghoogte op ongeveer 1,50 m. Dat zie je in de bovenste tekening. Dat is het **normale perspectief**.

Als je ogen hoger zijn, bijvoorbeeld als je op een trap staat of op een toren, krijg je een tekening in **vogelperspectief**.

Als je door de knieën zakt of op je buik gaat liggen, zijn je ogen lager. Je krijgt een tekening in **kikkerperspectief**.



Theorie B Hoogte berekenen in normale perspectieftekening

Perspectiefregel 3

De horizon is op ooghoogte, dus op ongeveer 1,50 m hoogte.

Perspectiefregel 4

In een perspectieftekening mag je alleen verticale afstanden meten.

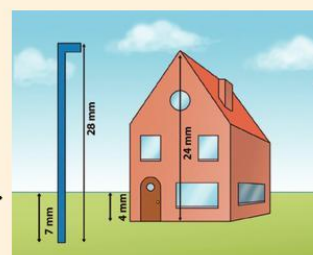
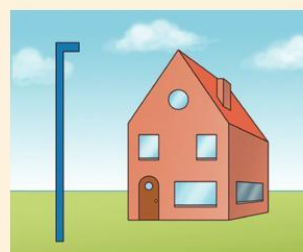
Voorbeeld Hoogte berekenen in perspectieftekening

Opgave

- a Bereken de hoogte van het huis.
- b Bereken de hoogte van de lantaarnpaal.

Aanpak

- a De ooghoogte is op ongeveer 1,50 m.
Van de onderkant van het huis naar de horizon is 4 mm.
Van de onderkant van het huis naar de punt van het huis is 24 mm.
 $24 : 4 = 6$, dus de hoogte van het huis is 6 keer ooghoogte.
- b Van de onderkant lantaarnpaal tot de horizon is 7 mm.
Van de onderkant lantaarnpaal tot de bovenkant is 28 mm.
 $28 : 7 = 4$, dus de hoogte van de lantaarnpaal is 4 keer ooghoogte.



Uitwerking

- a** $24 : 4 = 6$, dus de hoogte van het huis is 6 keer ooghoogte.
- Het huis is ongeveer $6 \times 1,50 = 9$ m hoog.
- b** $28 : 7 = 4$, dus de hoogte van de lantaarnpaal is 4 keer ooghoogte.
- De lantaarnpaal is ongeveer $4 \times 1,50 = 6$ m hoog.

Hoogte

Test
opgave

[> WERKBOEK]

- a** Bereken de hoogte van de boom.
Gebruik de afbeelding in het werkboek om de maten te meten.
- b** Teken bij A en B een lantaarnpaal van 3 m hoog.



Zendmast

9

- a** De horizon is op ooghoogte, dus 1,50 m.
Om de hoogte van de zendmast te berekenen, meet je het stukje van de mast onder de horizon.
Hoeveel mm is dat?
- b** Hoeveel mm is de hele zendmast?
- c** Laat met een berekening zien dat de zendmast 16 keer zo hoog is als het stukje tot de horizon.
De zendmast is dus $16 \times 1,50$ m hoog.
- d** Bereken de hoogte van de zendmast.



Lantaarnpalen

10

[> WERKBOEK] Gebruik de tekening van de vorige opgave.

- a** Laat met een berekening zien dat de lantaarnpaal 2,5 keer zo hoog is als het stukje tot de horizon.
De lantaarnpaal is dus $2,5 \times 1,50$ m hoog.
- b** Bereken de hoogte van de lantaarnpaal.
- c** Teken bij B nog een lantaarnpaal die even hoog is.

Amsterdam

11
☐◎*

[>] [☐] WERKBOEK

- Zoek het verdwijnpunt en teken de horizon.
- Hoe hoog zijn de bomen in het midden van de tekening?
- Hoe hoog is de top van de vlaggenmast?
- Teken een mens bij punt B. Gebruik de vuistregel.



New York

12
◎*

[>] [☐] WERKBOEK



- Vind in de tekening van New York het verdwijnpunt door twee vluchtlijnen door te trekken. Teken de horizon.
- Vooraan rechts bij A staat een paal. Hoe hoog is die paal?
- Hoe hoog is het gele gebouw aan de linkerkant van de weg?
- Voor de finish van de marathon komt er een boog van 3 m hoog. De boog loopt vanaf de paal rechts over de hele breedte van de weg. Teken die boog.

Schuur

13

*

[>  WERKBOEK] Je ziet dat geen van de wanden van de schuur evenwijdig staat met de horizon. Dat komt doordat de schuur is getekend in tweepuntsperspectief.

Om te weten hoe hoog de schuur is ga je uitzoeken waar de horizon ligt.

- Teken de vluchtlijn door de bovenkant van het dak naar rechts.
- Evenwijdig aan de bovenkant van het dak loopt de onderkant van de muur met het raam. Teken de vluchtlijn door de onderkant van de schuur naar rechts.
- Waar de twee vluchtlijnen elkaar snijden zet je V . Dat is het eerste verdwijnpunt.
- Teken de vluchtlijn langs de onderkant van de deuren naar links.
- Evenwijdig aan de onderkant van de deuren loopt de bovenkant van de deuren. Teken die vluchtlijn.
- Het snijpunt van de twee vluchtlijnen is het tweede verdwijnpunt.
- Teken de horizon door de twee verdwijnpunten.
- Hoe hoog is de schuur?



Rekenbreak



Vul in.

$$€ 240\,000 + € 90\,000 = € \dots$$

$$2300\text{ kg} + 700\text{ kg} = \dots \text{ ton}$$



De vrachtauto van Ron kan 28 ton vervoeren. Hoeveel kilogram is dat?

Het huis van Ron kostte $2\frac{1}{2}$ ton.

Hoeveel euro is dat?



Woordenlijst

- | | | |
|-----------------------|------------------------|--------------------|
| • éénpuntsperspectief | • normaal perspectief | • verdwijnpunt |
| • horizon | • perspectief | • vluchtlijn |
| • kikkerperspectief | • tweepuntsperspectief | • vogelperspectief |

3.2 Coördinaten in de ruimte

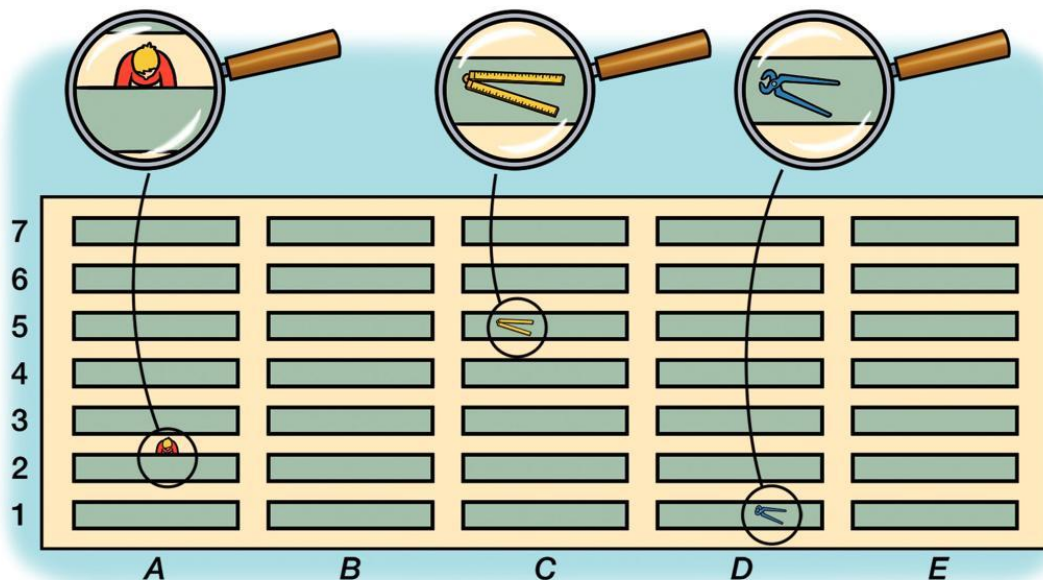
Zweedse woonwinkel

14
□ ⊙ *

In het magazijn van een Zweedse woonwinkel ligt alles in stellingkasten. In de tekening zie je een bovenaanzicht van een deel van het magazijn met de stellingkasten.

Alle stellingen zijn genummerd: A1, A2, ... B1, ... enzovoort.

- Op welke stelling ligt een duimstok?
- Bij welke stelling staat Jody?
- Op welke stelling ligt een nijptang?



15
□ ⊙ *

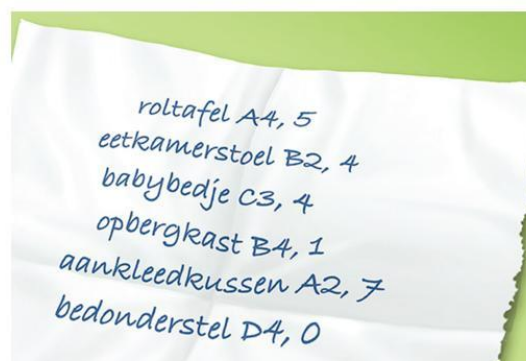
Jasmin heeft een aantal meubels uitgezocht in de winkel. Ze heeft een briefje gemaakt waarop staat waar in het magazijn haar meubels te vinden zijn.

Op het briefje zie je *roltafel A4,5*.

Dat betekent:

op stelling A4 op de vijfde plank van onderen liggen roltafels.

- Wat betekent *eetkamerstoel B2,4*?
- Welk onderdeel ligt het hoogst?
- Wat betekent *bedonderstel D4,0*?



Theorie C Coördinaten in de ruimte

De parasol is 200 cm hoog.

Vanaf de paal naar de top van de parasol ga je:

- 500 cm in de x -richting
- 225 cm in de y -richting
- 200 cm in de z -richting.

De top van de parasol heeft dus de coördinaten (500, 225, 200).



Coördinaten in de ruimte

**Test
opgave**

Hiernaast zie je een hoogtekartje. In het kaartje is een rooster getekend.

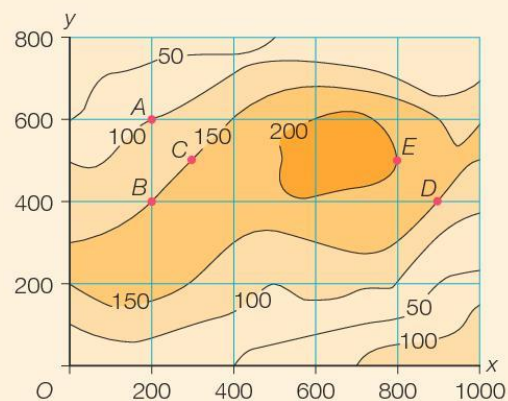
Het punt A ligt 100 m hoog. De coördinaten van A zijn dus (200, 600, 100).

- Schrijf de coördinaten van de punten B tot en met E op.
- Van een punt P zijn twee coördinaten gegeven.

Vul de ontbrekende coördinaten in.

Geef alle drie de mogelijkheden.

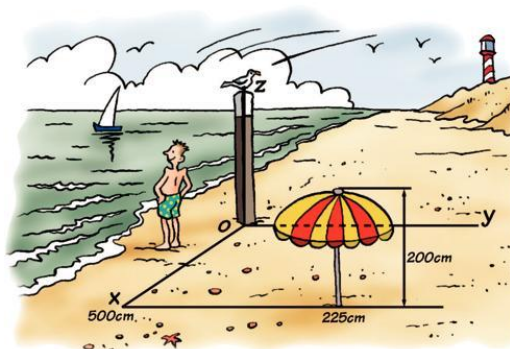
$P(800, \dots, 100)$ of $P(800, \dots, 100)$ of $P(800, \dots, 100)$.



Schatgraven

16

[> **WERKBOEK**] Camping De Vuurtoren organiseert een spel op het strand. Rudi verstopt van tevoren vijf 'schatten' in het zand. Hij wil ze later zelf nog terug kunnen vinden. Daarom schrijft hij van elke schat precies de plaats op. Zie het lijstje hieronder. Hij gebruikt de strandpaal om te beginnen met tellen.



- a Bij goudstuk staat $(300, 200, -20)$. Dat betekent dat de munt verstopt ligt bij het punt $(300, 200)$ op een diepte van 20 cm. In het assenstelsel in je werkboek is op die plaats een munt getekend. Schrijf er de diepte -20 bij.
- b Geef op die manier ook de plaats van de andere vier schatten aan.
- c Welke schat ligt het diepst?

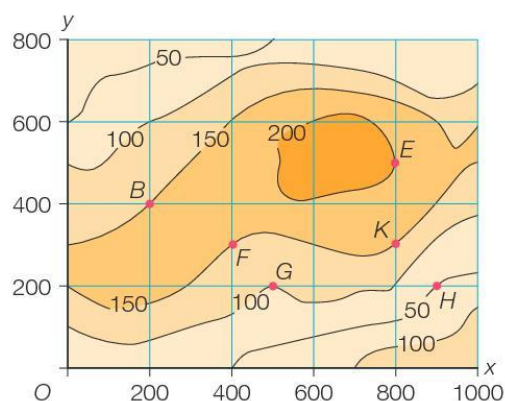
Hoogtekaartje

17
☐◎

Hiernaast zie je een hoogtekaartje.

In het kaartje is een rooster getekend. Het punt B ligt 150 m hoog. De coördinaten van B zijn dus $(200, 400, 150)$.

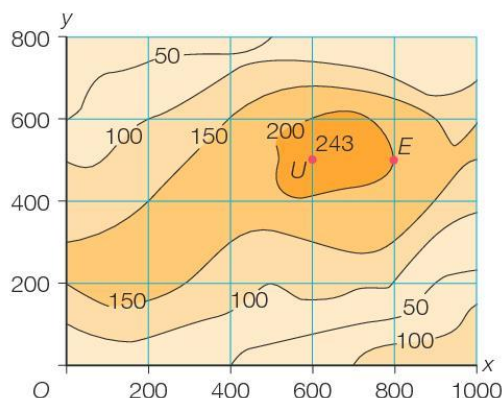
- a Schrijf de coördinaten van de punten F , G , H en K op.
- b Van punt Q zijn twee coördinaten gegeven. $Q(\dots, 600, 150)$. Je weet dus de eerste coördinaat niet. Er zijn twee punten waar Q kan liggen. Het eerste punt is $(400, 600, 150)$. Welk is het andere punt waar Q kan liggen? Kies uit $Q(800, 600, 150)$ of $Q(900, 600, 150)$.
- c Van punt R zijn twee coördinaten gegeven. Vul de ontbrekende coördinaat in. $R(0, \dots, 50)$.



Echoput

18
☐◎*

- a Punt U is het hoogste punt van het kaartje. Daar staat een uitkijktoren van 15 m hoog. Schrijf de coördinaten op van de top van de uitkijktoren.
- b In E is een echoput van 47 m diep. Schrijf de coördinaten op van de bodem.



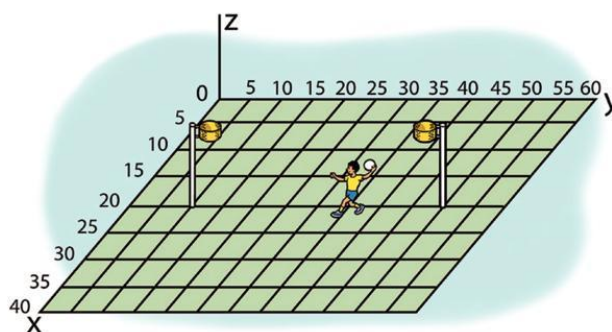
Korfbalveld

19



Over het korfbalveld is een rooster getekend. De oorsprong ligt in een hoek van het veld. De paal met de korf is 3,5 m hoog.

- Van de oorsprong naar de top van de linkerpaal is het ... meter in de x -richting
... meter in de y -richting
... meter in de z -richting.
- De top van de linkerpaal heeft dus de coördinaten (... , ... , ...).



20



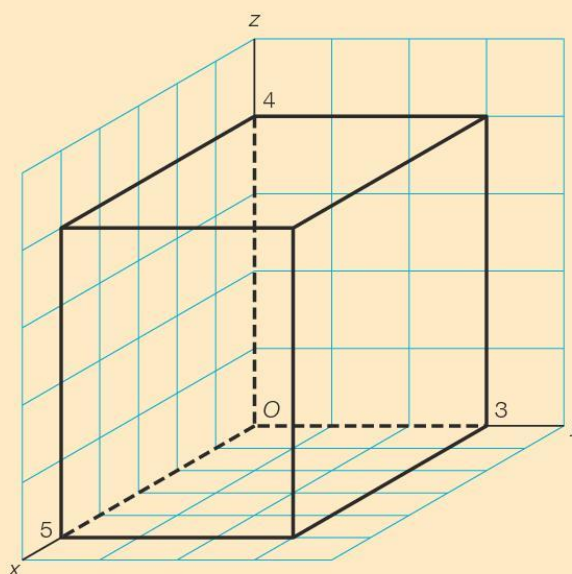
- Schrijf de coördinaten van de top van de rechterpaal op.
- Dorien staat precies in het midden tussen de twee palen. Zij houdt de bal vast op 2 m hoogte. Schrijf de coördinaten van de bal op.

Theorie D [VMBO-GT] Driedimensionaal assenstelsel

Ruimte heeft drie dimensies, een lengte een breedte en een hoogte. Daarom heb je in de ruimte drie assen nodig, de x -as, de y -as en de z -as.

Om een punt in de ruimte aan te geven gebruik je drie coördinaten, de x -coördinaat, de y -coördinaat en de z -coördinaat.

Een assenstelsel in de ruimte heet een **driedimensionaal assenstelsel**.



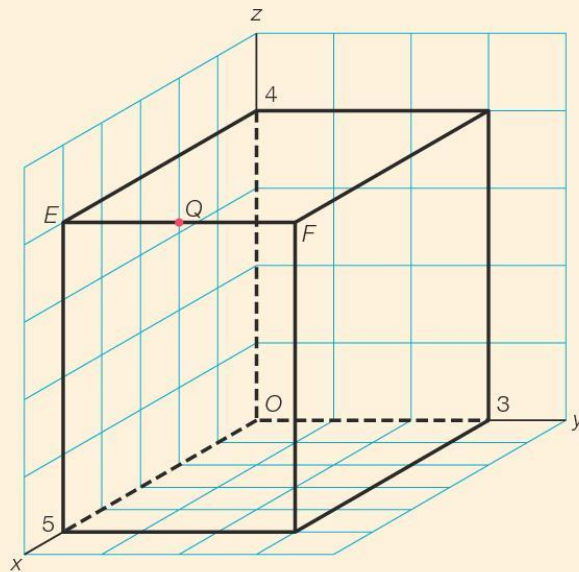
Voorbeeld Coördinaten in de ruimte

Opgave

- Welke coördinaten horen bij punt F ?
- Punt Q is het midden van EF . Welke coördinaten horen bij punt Q ?

Aanpak

- Voor punt F ga je vanuit de oorsprong 5 stappen in de x -richting 3 stappen in de y -richting 4 stappen in de z -richting.
- Voor punt Q ga je vanuit de oorsprong 5 stappen in de x -richting 1,5 stap in de y -richting 4 stappen in de z -richting.



Uitwerking

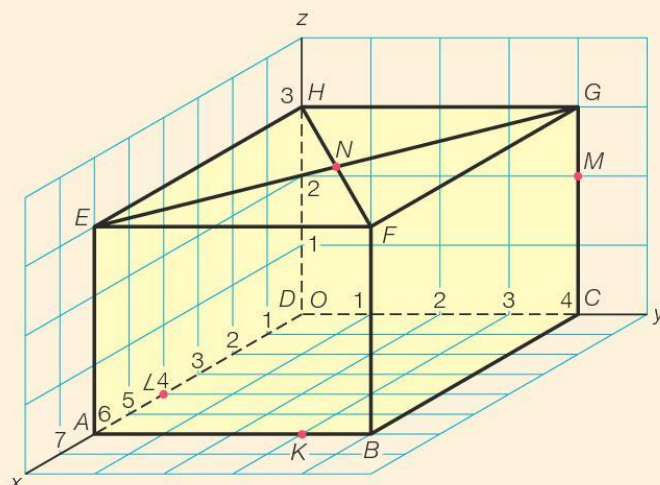
- De coördinaten van punt F zijn $(5, 3, 4)$.
- De coördinaten van punt Q zijn $(2.5, 3, 4)$.

GT

Balk

Test
opgave

- Schrijf de coördinaten van de punten K , L en M op.
- Punt N is het snijpunt van de diagonalen EG en FH . Schrijf de coördinaten van punt N op.

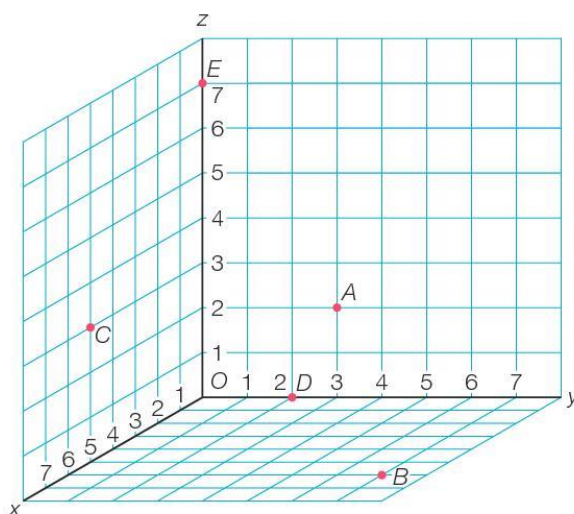


21



Drie dimensies

- In de figuur zie je drie assen. Schrijf de namen van de assen op.
- Leg uit dat het punt A als coördinaten heeft $(0, 3, 2)$.
- Schrijf de coördinaten van de punten B , C , D en E op.

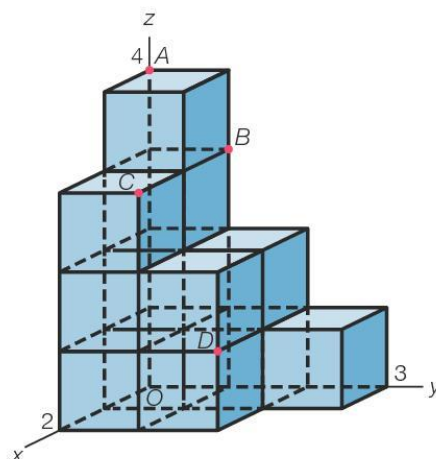


Blokkentoren

22



- Vanuit O naar C is:
- 2 stappen in de x -richting
 - 1 stap in de y -richting
 - 3 stappen in de z -richting.
- De coördinaten van punt C zijn dus $(2, 1, 3)$.
Schrijf de coördinaten op van de punten A , B en D .



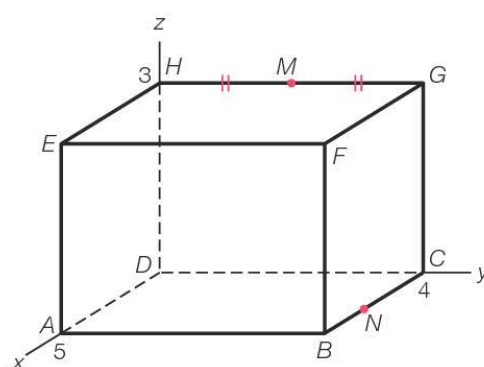
Balken

23



Bij hoekpunt H van de balk horen de coördinaten $(0, 0, 3)$.

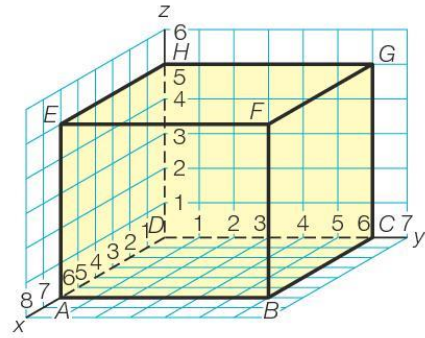
- Vul in: Voor punt A ga je vanuit de oorsprong ... in de x -richting, ... in de y -richting en ... in de z -richting. Welke coördinaten horen bij hoekpunt A ?
- Welke coördinaten horen bij hoekpunt C ?
- Punt M is het midden van ribbe GH . Welke coördinaten horen bij punt M ?
- De x -coördinaat van punt N is 4. Schrijf de coördinaten van punt N op.



24

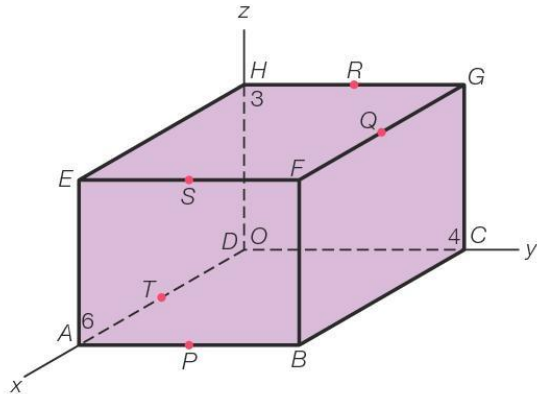
[> WERKBOEK] In het assenstelsel is een balk getekend. Punt D staat in de oorsprong. Daarom heeft D de coördinaten $(0, 0, 0)$.

- Schrijf de coördinaten op van de andere hoekpunten van de balk.
- Teken het punt $Q(0, 6, 2)$.
- Op welke ribbe ligt Q ?



25

De punten P , Q , R , S en T zijn steeds de middens van een ribbe van de balk hiernaast. Schrijf de coördinaten van die punten op.



26

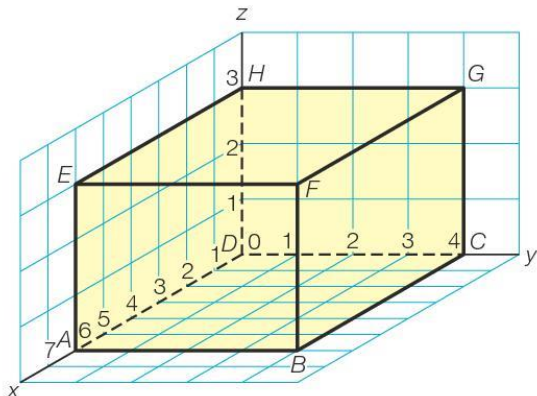
[> WERKBOEK]

- Teken het punt $P(5, 0, 1)$.
- In welk vlak ligt punt P ?
- In welk vlak ligt het punt $Q(3, 4, 2)$?

27

Zeg van de volgende punten of ze binnen de balk, buiten de balk, of op een van de zijvlakken van de balk liggen.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a $(2, 2, 1)$ | c $(6, 2, 4)$ |
| b $(2, 4, 1)$ | d $(0, 2, 5)$ |



Rekenbreak



Bereken. Maak eerst een schatting.

$$20 \times 1,52$$

$$300 \times 2,84$$

Woordenlijst

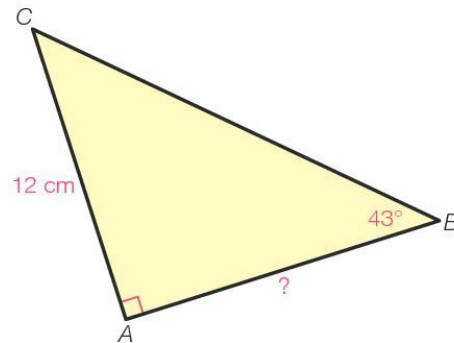
- coördinaten in de ruimte
- driedimensionaal assenstelsel

3.3 Zijden berekenen in een driehoek

Driehoek ABC

28
□ ⊗ *

Tinka wil zijde AB berekenen.
Waarom lukt dat niet met de stelling van Pythagoras?



Theorie E Zijden berekenen in een driehoek

Krijg je de opdracht om in een driehoek de lengte van een zijde te berekenen, denk dan aan

symmetrie

gelijkvormigheid

de stelling van Pythagoras

goniometrie.

Welke manier je gaat gebruiken hangt af van de gegevens die je hebt.

In deze theorie zie je een voorbeeld van elk van de vier manieren.

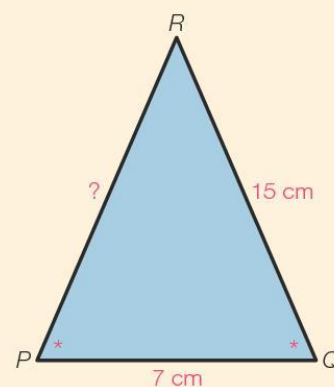
Voorbeeld Symmetrie

Opgave

Bereken PR .

Aanpak

Aan de tekens voor gelijke hoeken zie je dat $\triangle PQR$ een gelijkbenige driehoek is, dus PR is even lang als QR .



Uitwerking

● $PR = PQ = 15 \text{ cm}$
●

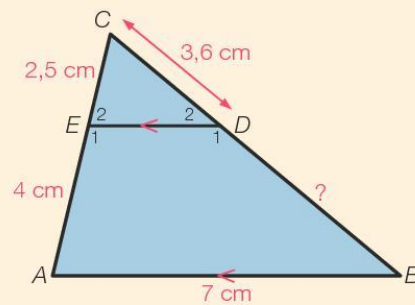
Voorbeeld Gelijkvormigheid

Opgave

Bereken BD .

Aanpak

Je kunt BD berekenen door eerst BC te berekenen. Daarna trek je de lengte van CD daarvan af. Voor het berekenen van BC kun je gelijkvormigheid gebruiken.



- 1 Onderzoek of de driehoeken ABC en EDC gelijkvormig zijn.
Zoek uit welke hoeken overeenkomstig zijn.
- 2 Schrijf de driehoeken in een verhoudingstabel met de letters in de juiste volgorde. Zet de kleinste driehoek boven.
- 3 Vul de zijden in. Zet de overeenkomstige zijden onder elkaar.
Vul de maten in die je weet.
Zet bij de zijde die je gaat berekenen een vraagteken.
- 4 Bereken de vergrotingsfactor. Gebruik daarbij de twee zijden onder elkaar waarvan je de lengtes weet.
- 5 Bereken de gevraagde zijde.

Uitwerking

$$\begin{array}{l} \angle A = \angle E_2 \\ \angle B = \angle D_2 \\ \angle C = \angle C \\ \text{dus } \triangle ABC \sim \triangle EDC \end{array}$$

$\triangle EDC$	$ED = ?$	$DC = 3,6$	$EC = 2,5$
$\triangle ABC$	$AB = 7$	$BC = ?$	$AC = 6,5$

$: 2,6$ $\times 2,6$

vergrotingsfactor = $6,5 : 2,5 = 2,6$

$$BC = 3,6 \times 2,6 = 9,36 \text{ cm}$$
$$BD = 9,36 - 3,6 = 5,76 \text{ cm}$$

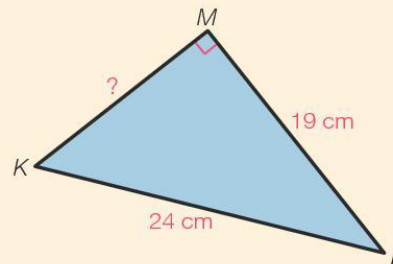
Voorbeeld Stelling van Pythagoras

Opgave

Bereken KM . Rond af op één decimaal.

Aanpak

$\triangle KLM$ is een rechthoekige driehoek. Je weet twee zijden. Je kunt de derde zijde berekenen met de stelling van Pythagoras. Maak het schema. KM is een rechthoekszijde.



Uitwerking

$$\begin{array}{l} \bullet \text{ rhz}^2 = 361 \\ \bullet \text{ ? rhz}^2 = 215 \dots\dots\dots 576 - 361 = 215 \\ \bullet \hline \bullet \text{ sz}^2 = 576 + \\ \bullet \text{ sz} = \sqrt{215} = 14,662\dots \\ \bullet \text{ KM} = 14,7 \text{ cm} \end{array}$$

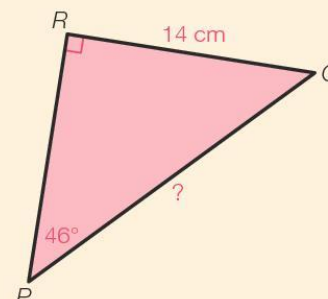
Voorbeeld Goniometrie

Opgave

Bereken PQ . Rond af op één decimaal.

Aanpak

$\triangle PQR$ is een rechthoekige driehoek. Je weet een zijde en een hoek. Je kunt de derde zijde berekenen met een van de goniometrische verhoudingen. Van $\angle P$ weet je de overstaande rechthoekszijde. De schuine zijde wordt gevraagd. Gebruik het ezelsbruggetje SOSCASTOA.



Uitwerking

$$\begin{array}{l} \bullet \sin 46^\circ = \frac{14}{PQ} \\ \bullet 14 : \sin 46^\circ = 19,462\dots \\ \bullet PQ = 19,5 \text{ cm} \end{array}$$

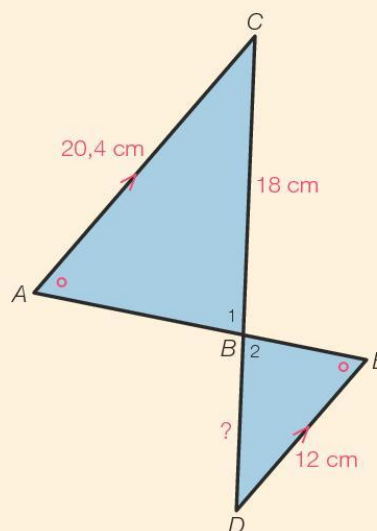
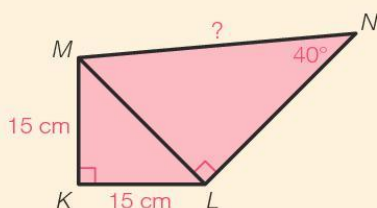
$$3 = \frac{6}{\text{hand icon}}$$

Je weet 2 niet, je doet dus $6 : 3$ om 2 te vinden.

Zijden berekenen

Test
opgave

- a Bereken zijde BD . Rond af op één decimaal.
b Bereken zijde MN . Rond af op hele centimeters.



Twee driehoeken

29
Test
opgave

In de rechthoekige $\triangle ABC$ ga je zijde AB berekenen. Je weet $\angle A$ maar geen zijde van die driehoek. AC is ook een zijde van $\triangle ACD$.

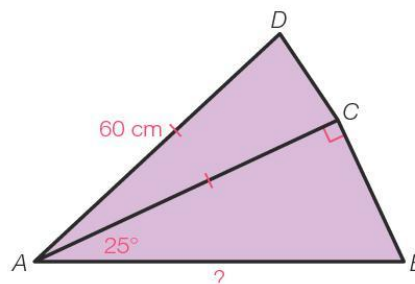
- a Wat voor soort driehoek is $\triangle ACD$?
b Hoe lang is zijde AC ?
c Nu weet je een hoek en een zijde in $\triangle ABC$. Je kunt goniometrie gebruiken. Vul in. Kies uit:

schuine zijde, aanliggende rechthoekszijde en overstaande rechthoekszijde.

AC is de ... van $\angle A$

AB is de ...

- d Je kunt nu AB berekenen. Bereken AB met de cosinus.

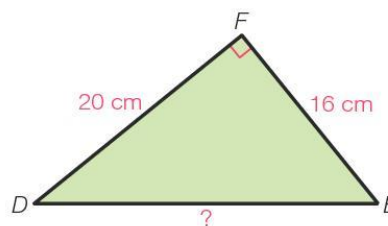


$$\text{Cosinus} = \frac{\text{Aanliggende rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}}$$

Welke manier

30
Test
opgave

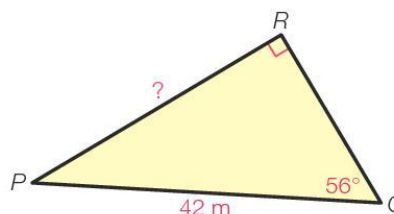
Je weet twee zijden van de rechthoekige driehoek DEF . De derde zijde kun je berekenen met de stelling van Pythagoras. Bereken zijde DE . Rond af op één decimaal.



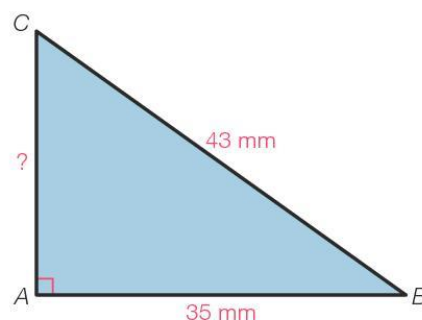
31
Test
opgave

Van de rechthoekige driehoek PQR weet je een zijde en een scherpe hoek.

- a Welke manier gebruik je om zijde PR te berekenen, *Pythagoras* of *goniometrie*?
b Bereken zijde PR . Rond af op één decimaal.



- 32** **a** Welke manier gebruik je om zijde AC te berekenen, *Pythagoras* of *goniometrie*?
b Bereken zijde AC . Rond af op één decimaal.

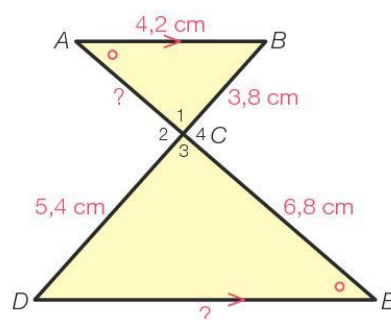


Gelijkvormige driehoeken

- 33** **[WERKBOEK]** Bekijk de driehoeken hiernaast.

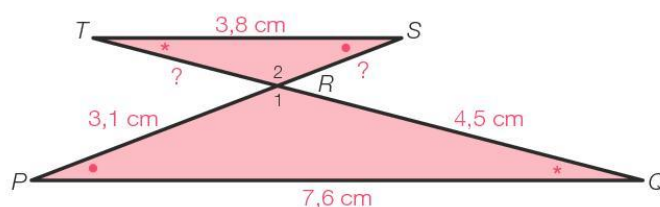
- a** Vul in:
 $\angle A = \angle \dots$ $\angle B = \angle \dots$ $\angle C_1 = \angle \dots$
 Dus $\triangle ABC \sim \triangle \dots$
b Vul de tabel in het werkboek verder in.

$\triangle ABC$	$AB = \dots$	$BC = \dots$	$AC = \dots$
$\dots$			



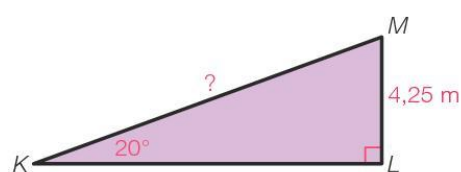
- c** Bereken de vergrotingsfactor. Rond af op één decimaal.
d Bereken de lengte van de zijden DE en AC . Rond af op één decimaal.

- 34** Bereken de zijden RT en RS . Rond af op één decimaal.

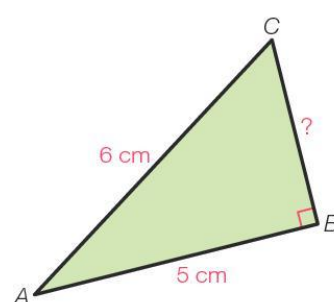


Zijde berekenen

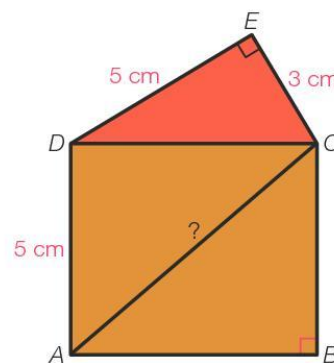
- 35** Bereken in $\triangle KLM$ de zijde KM . Rond af op twee decimalen.



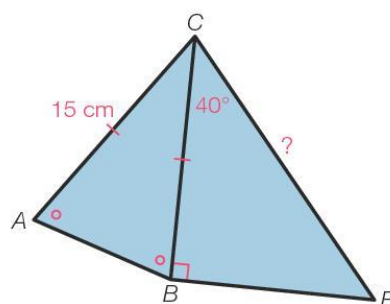
- 36** Bereken zijde BC . Rond af op één decimaal.



- 37** Bereken AC . Rond af op één decimaal.

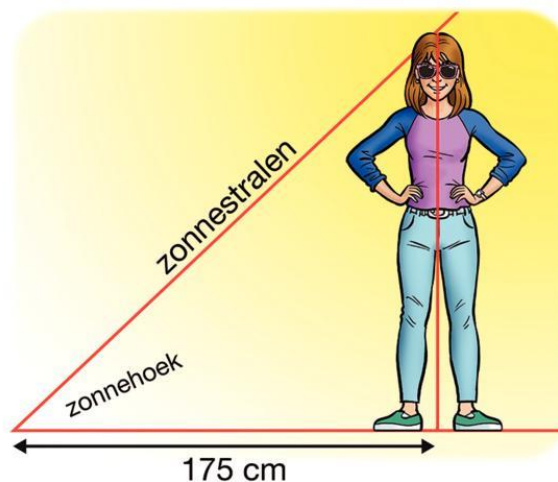
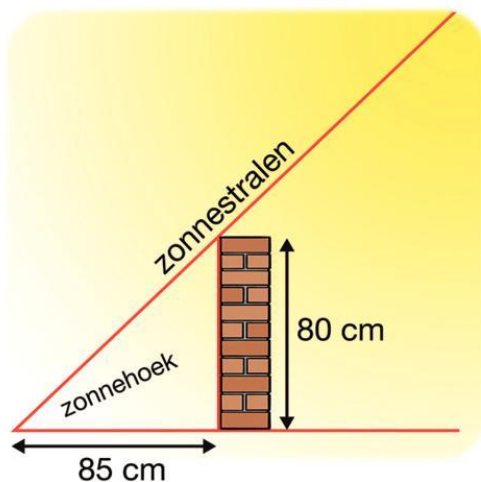


- 38** Bereken CE van de blauwe figuur. Rond af op één decimaal.



Schaduw

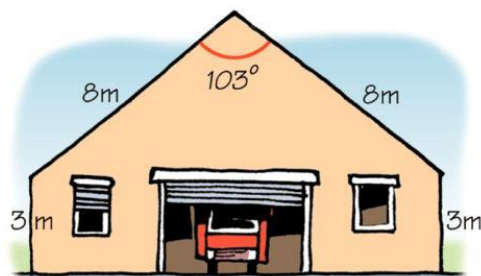
- 39** De hoek die zonnestralen met de aarde maken noemen we de zonnehoek. Het muurtje, de schaduw van het muurtje en de zonnestralen vormen een driehoek. Zo'n driehoek zie je ook bij het meisje en haar schaduw.



Bereken de lengte van het meisje. Rond af op hele centimeters.

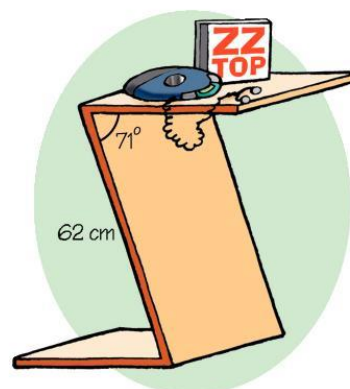
Schuur

- 40** Hiernaast zie je het vooraanzicht van een schuur.
- Bereken de breedte van de schuur in meters. Rond af op twee decimalen.
 - Bereken de hoogte van de schuur in meters. Rond af op twee decimalen.



Bijzettafel

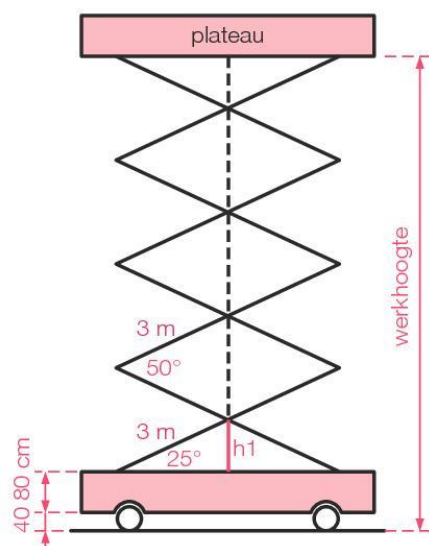
- 41 *** Een houten bijzettafeltje heeft de vorm van een **Z**. Het schuine gedeelte is 62 cm lang en maakt een hoek van 71° met het tafelblad. Bereken de hoogte van het tafeltje.



Schaarlift

- 42 *** Marloes heeft een schildersbedrijf. Soms moet er op grote hoogte geschilderd worden. Dan gebruikt zij een schaarlift. In de schaarlift zie je veel hoeken.

- Waarom wordt deze lift schaarlift genoemd, denk je?
- Bereken de hoogte h_1 .
- Bereken de werkhogte van de schaarlift.



Rekenbreak



Bereken.

$$175 : 25$$

$$7,50 \times 16 + 25$$

Woordenlijst

- gelijkvormigheid
- goniometrie
- stelling van Pythagoras
- symmetrie

3.4 Hellingspercentage

Steile helling

43
☐ ⊗ *

Er bestaan waarschuwingsborden voor steile hellingen. Welk van onderstaande borden is zo'n waarschuwingsbord?



44
☐ ⊗ *

Welke van de beweringen hieronder is waar?

- A hellingspercentage = sinus hellingshoek $\times$ 100
- B hellingspercentage = cosinus hellingshoek $\times$ 100
- C hellingspercentage = tangens hellingshoek $\times$ 100

Theorie F Hellingspercentage

Hoe steil een helling is hangt af van de hellingshoek. De steilheid wordt aangegeven met een **hellingspercentage**. Bij het berekenen van het hellingspercentage gebruik je de tangens van de hellingshoek.

$$\text{hellingspercentage} = \tan \text{ hellingshoek} \times 100$$

Hellingspercentages rond je af op een geheel getal.



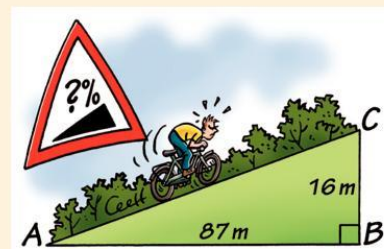
Voorbeeld Hellingspercentage berekenen

Opgave

Bereken het hellingspercentage van de helling.

Aanpak

- $\tan \text{ hellingshoek} = \frac{BC}{AB}$. Laat de uitkomst van de deling op je rekenmachine staan.
- Vermenigvuldig de uitkomst met 100. Rond af op helen.



Uitwerking

$$\text{hellingspercentage} = \frac{16}{87} \times 100 = 18\%$$

Voorbeeld Lengte berekenen met hellingspercentage

Opgave

Een weg heeft een hellingspercentage van 12%. Het hoogteverschil is 256 m.

Bereken de lengte van de helling. Rond af op hele meters.

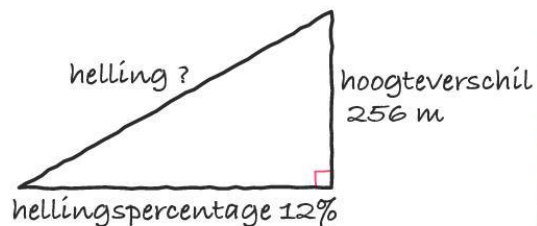
Aanpak

- Maak een schets van de situatie. Zet er de gegevens in. Zet een vraagteken bij de helling. Bereken de tangens van de hellingshoek met **$\tan \text{ hellingshoek} = \text{hellingspercentage} : 100$** .
- Bereken de hellingshoek met $\tan^{-1} \left(\frac{0,12}{1} \right) =$. Rond af op hele graden.
- Je weet de overstaande rechthoekszijde van de hellingshoek. De schuine zijde wordt gevraagd.

$$\text{Gebruik sin hellingshoek} = \frac{\text{hoogteverschil}}{\text{helling}}.$$

Uitwerking

- $\tan \text{ hellingshoek} = 12 : 100 = 0,12$
- $\text{hellingshoek} = 7^\circ$
- $\sin 7^\circ = \frac{256}{\text{helling}}$
- $\text{helling} = 256 : \sin 7^\circ = 2100,610\dots$
- De helling is 2101 m.

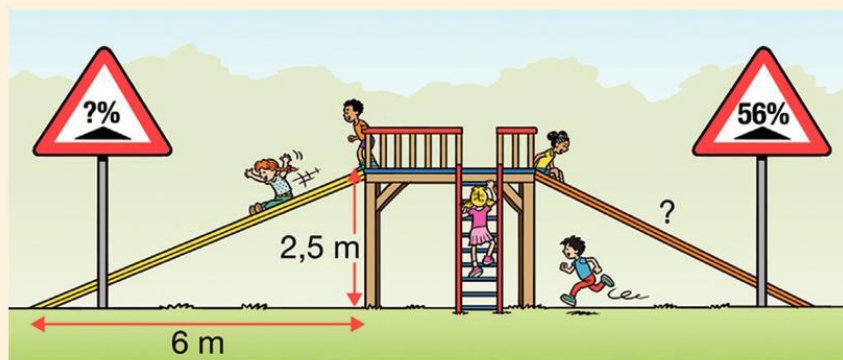


Hellingspercentage

Test opgave

Tolga ontwerpt een speeltoestel met twee glijbanen voor zijn nichtje.

- Bereken het hellingspercentage van de glijbaan links.
- Bereken de lengte van de glijbaan rechts. Rond af op twee decimalen.

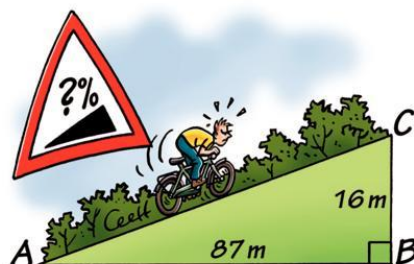


Hellingen

45

Je gaat het hellingspercentage berekenen. Een hellingspercentage rond je af op een geheel getal. Gebruik de formule **hellingspercentage = $\tan$ hellingshoek $\times 100$** . Vul in.

$$\text{hellingspercentage} = \frac{\dots}{\dots} \times 100 = \dots$$



46

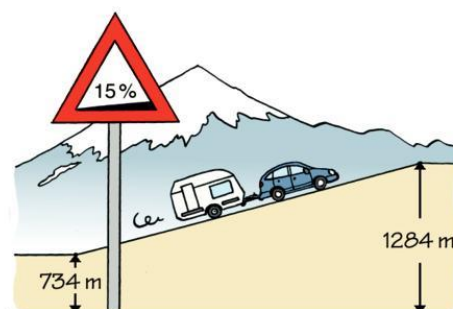
Eén van de steilste skihellingen in Oostenrijk heet de Harakiri. Deze helling heeft een hellingspercentage van 78%. Het hoogteverschil is 376 m.

- Maak een schets van de situatie.
- Bereken de hellingshoek. Gebruik de formule **$\tan$ hellingshoek = hellingspercentage : 100**.
- Bereken de lengte van het parcours. Rond af op hele meters.



47

Het begin van de weg is 734 m boven zeeniveau. Het einde van de weg ligt op 1284 m. Het hellingspercentage is 15%. Bereken de lengte van de weg.

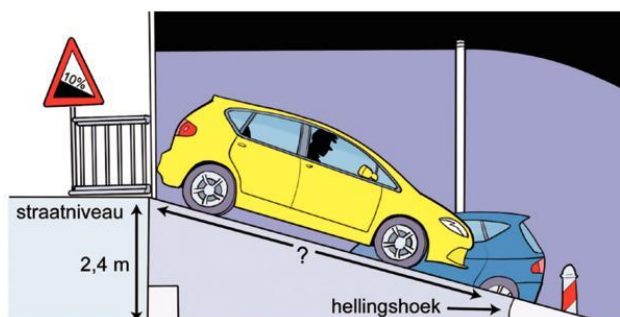


Parkeergarage

48



Een ondergrondse parkeergarage ligt 2,4 m onder het straatniveau. De inrit heeft een hellingspercentage van 10%. Bereken de lengte van de inrit. Rond af op twee decimalen.



Lengte

49



Een helling heeft een hellingspercentage van 12%. De hoogte is 256 m. Bereken de lengte van de helling. Rond af op hele meters.

Automobilist

50



Een automobilist rijdt op een helling. Op zijn kilometerteller ziet hij dat hij 2200 m op deze helling heeft gereden. Op zijn hoogtemeter leest hij af dat hij daarbij 350 m is gestegen. Bereken het hellingspercentage van de weg.

Rekenbreak

Bereken het gemiddelde van 14, 25, 35 en 31.

Bereken het gemiddelde van -8, -3, 7, -5 en 4.

Bas koopt 150 tulpenbollen.

Hij betaalt met een briefje van € 50.

Hoeveel krijgt hij terug?



tulpenbollen 50 stuks € 14,50

Woordenlijst

• hellingshoek

• hellingspercentage

3.5 Goniometrie en hoeken

Theorie G Hoeken berekenen met goniometrie

Als je twee zijden van een rechthoekige driehoek weet kun je de scherpe hoeken van de driehoek berekenen.

Je kijkt eerst of je de **sinus**, de **cosinus** of de **tangens** nodig hebt. Daarna gebruik je de knop $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ of $\tan^{-1}$ van je rekenmachine en je weet de hoek.

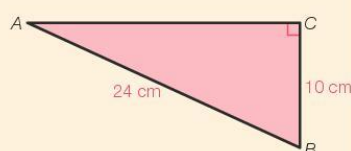
Afspraak:

Hoeken rond je af op hele graden.

Voorbeelden Hoeken berekenen met goniometrie

Opgave

Bereken $\angle A$ in $\triangle ABC$.



Aanpak

Van $\angle A$ weet je de overstaande rechthoekszijde (O) en de schuine zijde (S). Gebruik dus

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB} \quad \text{SOS}$$

Uitwerking

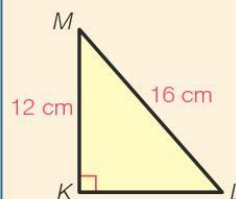
$$\begin{aligned} \sin \angle A &= \frac{10}{24} \\ \angle A &= 25^\circ \end{aligned}$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{10}{24}\right)$$

24.62431835

Opgave

Bereken $\angle M$ in $\triangle KLM$.



Aanpak

Van $\angle M$ weet je de aanliggende rechthoekszijde (A) en de schuine zijde (S). Gebruik dus

$$\cos \angle M = \frac{KM}{LM} \quad \text{CAS}$$

Uitwerking

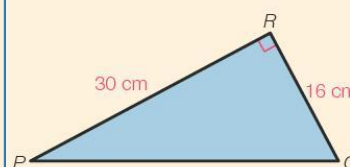
$$\begin{aligned} \cos \angle M &= \frac{12}{16} \\ \angle M &= 41^\circ \end{aligned}$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{12}{16}\right)$$

41.40962211

Opgave

Bereken $\angle Q$ in $\triangle PQR$.



Aanpak

Van $\angle Q$ weet je de overstaande rechthoekszijde (O) en de aanliggende rechthoekszijde (A). Gebruik dus

$$\tan \angle Q = \frac{PR}{QR} \quad \text{TOA}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} \tan \angle Q &= \frac{30}{16} \\ \angle Q &= 62^\circ \end{aligned}$$

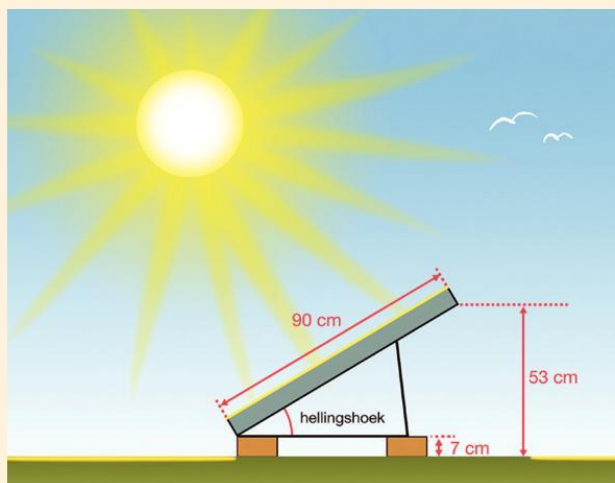
$$\tan^{-1}\left(\frac{30}{16}\right)$$

61.92751306

Zonnepaneel

Test
opgave

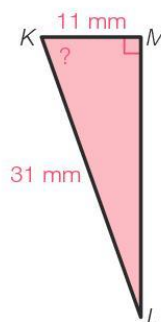
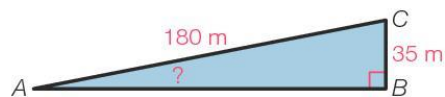
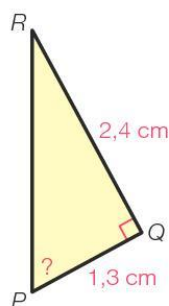
Bereken de hellingshoek van het zonnepaneel.



Hoeken berekenen

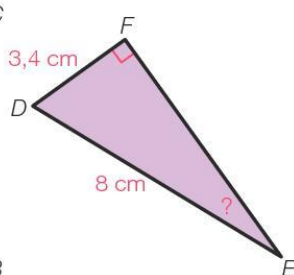
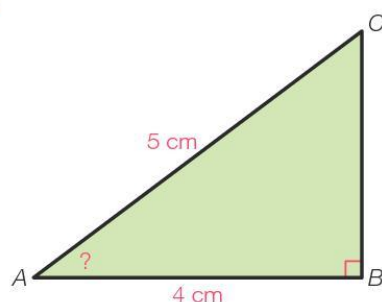
51
☐

- a Bereken $\angle P$ in $\triangle PQR$. Gebruik de $\tan^{-1}$ knop.
b Bereken $\angle A$ in $\triangle ABC$. Gebruik de $\sin^{-1}$ knop.
c Bereken $\angle K$ in $\triangle KLM$. Gebruik de $\cos^{-1}$ knop.



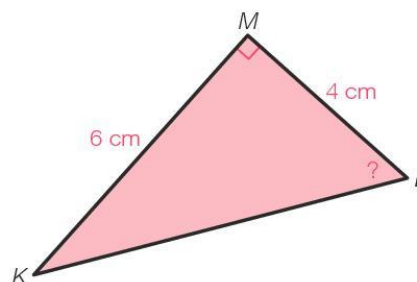
52
☐

Kijk steeds eerst of je $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ of $\tan^{-1}$ moet gebruiken.



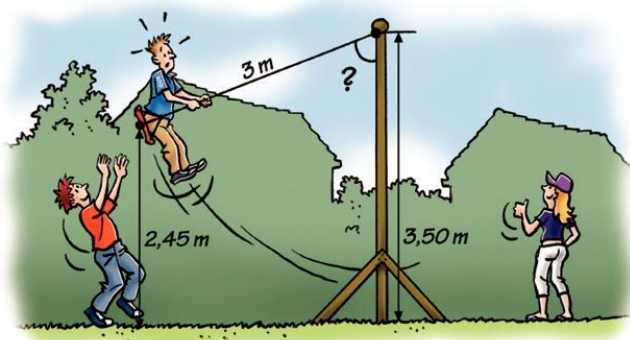
- a Bereken $\angle A$ in $\triangle ABC$.
b Bereken $\angle E$ in $\triangle DEF$.

- 53** Bereken $\angle L$ in $\triangle KLM$.

Schommel

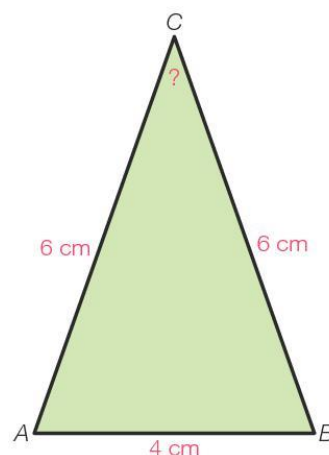
- 54** [ **WERKBOEK**] Bekijk de tekening van de schommel.

- Het touw van de schommel is de schuine zijde van een rechthoekige driehoek.
Teken die driehoek en zet er de maten bij die je weet.
- Bereken de hoek die het touw van de schommel maakt met de verticale staander.

Gelijkbenige driehoeken

- 55** [ **WERKBOEK**] Bereken $\angle C$ van $\triangle ABC$.
 Gebruik de symmetrieas.



Zonder tekening

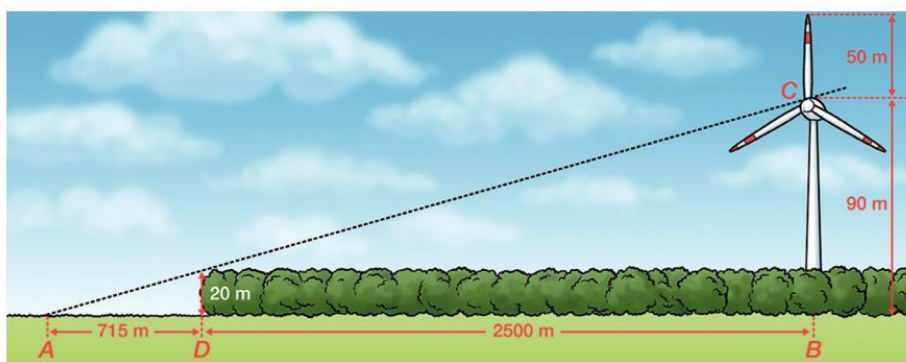
- 56** Bereken alle hoeken van een $\triangle DEF$ met
 $DE = EF = 8$ cm en $DF = 5$ cm.

Door de bomen

57

*

Er bestaan plannen om windmolens middenin bossen te zetten. Door de bomen zijn de windmolens niet goed zichtbaar. Er is dan dus weinig horizonvervuiling. Door hun hoogte vangen de windmolens nog wind genoeg. Als de windmolen 2,5 km diep in het bos staan, is de top van de mast (C) zichtbaar op 715 m van de bosrand.



De tiphoogte van deze windmolen is 140 m.

- Hoe groot is de hoek bij A?
- Alex staat op 420 m vanaf de bosrand. Hij kan de top van de wieken nog net zien.
Maak een schets van de situatie.
Hoe groot is de hoek bij Alex?
- Er wordt een nieuwe windmolen geplaatst met een tiphoogte van 195 m. Moet Alex dan dichterbij de bosrand gaan staan om net de top van de wieken te zien, of verder weg?

Rekenbreak

Mischa is op vakantie in Zweden.
Hij huurt daar een vakantiehuis.
Dat huis kost € 48 per dag.
Hoeveel Zweedse kronen zijn dat?

BELANGRIJKE WISSELKOERSEN

Valuta

	Amerikaanse dollar
	Britse pond
	Japanse yen
	Zwitserse frank
	Deense kroon
	Zweedse kroon

1 € = units

1,2844
0,7829
139,5950
1,2075
7,4439
9,1877

Woordenlijst

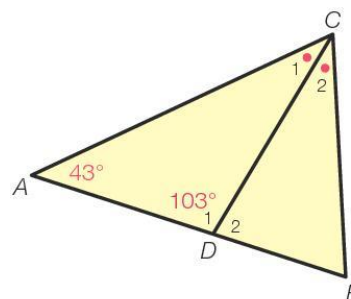
- hoeken berekenen met goniometrie

3.6 Hoeken in vlakke figuren

Hoeken in een driehoek



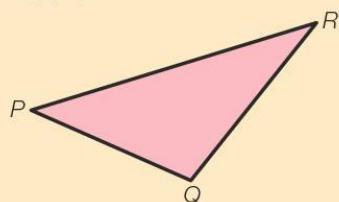
- a Bereken $\angle C_1$ in $\triangle ADC$.
b Hoe zie je in de figuur dat $\angle C_1 = \angle C_2$?
c Hoe groot is $\angle C_{12}$?



Theorie H Hoeken berekenen

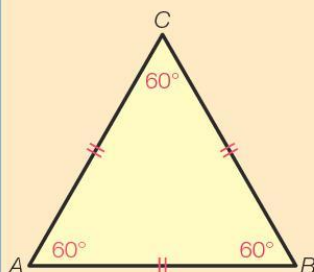
Met goniometrie kun je hoeken berekenen in een rechthoekige driehoek. Je maakt dan gebruik van de lengtes van zijden. Er zijn ook andere manieren om hoeken te berekenen. Je maakt dan gebruik van verschillende eigenschappen van driehoeken of van lijnen. Je kunt de tekeningen in het werkboek gebruiken om de graden in de hoeken te zetten.

De **drie hoeken** in een driehoek zijn **samen 180°** .



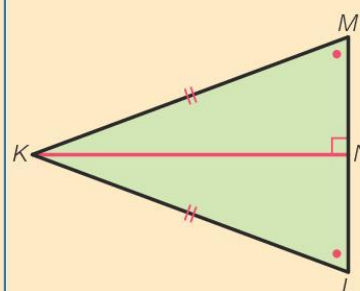
$$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^\circ$$

In een **gelijkzijdige driehoek** zijn alle hoeken 60° .



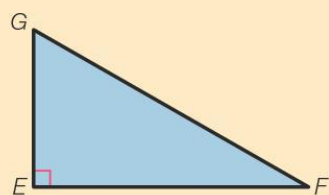
$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

In een **gelijkbenige driehoek** zijn twee hoeken gelijk.



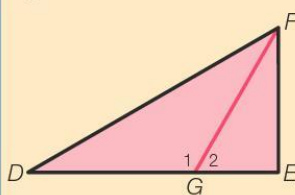
$$\angle L = \angle M$$

In een **rechthoekige driehoek** is één hoek 90° .



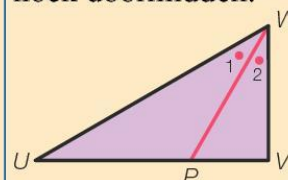
$$\angle F + \angle G + 90 = 180^\circ$$

Hoeken die een **gestrekte hoek** vormen zijn samen 180° .



$$\angle G_1 + \angle G_2 = 180^\circ$$

Een **deellijn** deelt een hoek doormidden.



$$\angle W_1 = \angle W_2$$

Voorbeeld Hoeken berekenen

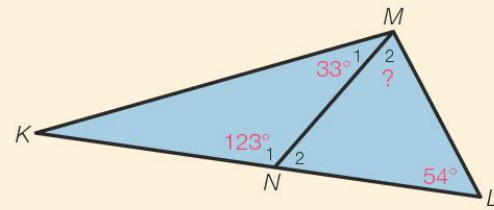
Opgave

Bereken $\angle M_2$.

Aanpak

Er staat *bereken*, dus je mag niet meten.

$\angle M_2$ kun je op twee manieren berekenen.



Aanpak manier 1

Bereken $\angle K$ in $\triangle KNM$ met

$$\angle K = 180^\circ - \angle M - \angle N.$$

Bereken $\angle M_{12}$ in $\triangle KLM$.

Bereken $\angle M_2$ met $\angle M_2 = \angle M_{12} - \angle M_1$

Aanpak manier 2

Bereken $\angle N_2$ met

$$\angle N_1 + \angle N_2 = 180^\circ.$$

Bereken $\angle M_2$ in $\triangle NLM$.

Uitwerking

- $\angle K = 180 - 123 - 33 = 24^\circ$
- $\angle M_{12} = 180 - 24 - 54 = 102^\circ$
- $\angle M_2 = 102 - 33 = 69^\circ$

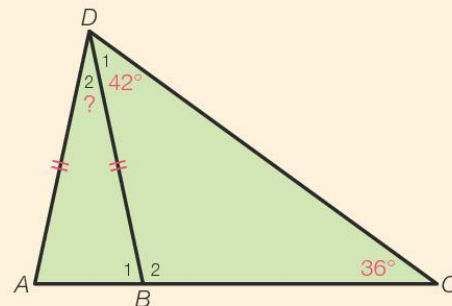
Uitwerking

- $\angle N_2 = 180 - 123 = 57^\circ$
- $\angle M_2 = 180 - 54 - 57 = 69^\circ$

Hoek berekenen

Test
opgave

[> WERKBOEK] Bereken $\angle D_2$.



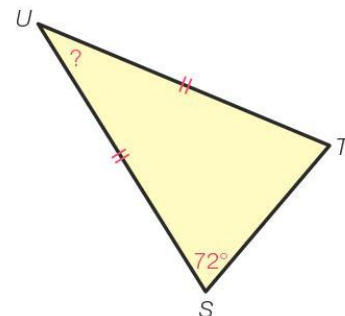
Symmetrische driehoeken

59

[> WERKBOEK]

- a Wat voor soort driehoek is $\triangle STU$?
- b Welke zijden van de driehoek zijn even lang?
- c Welke hoeken van de driehoek zijn even groot?
- d Bereken $\angle U$.

Bij dit soort opgaven kun je de tekeningen in je werkboek gebruiken om de graden in de hoeken te zetten.

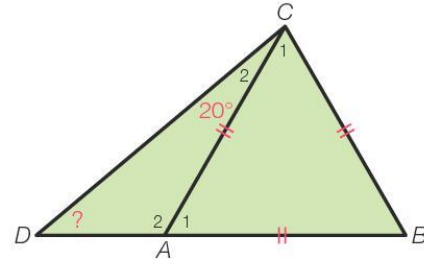


60

[WERKBOEK]



- a Wat voor soort driehoek is $\triangle ABC$?
 b Bereken $\angle A_1$.
 c Bereken $\angle A_2$.
 d Bereken $\angle D$.



Bij dit soort opgaven kun je de tekeningen in je werkboek gebruiken om de graden in de hoeken te zetten.

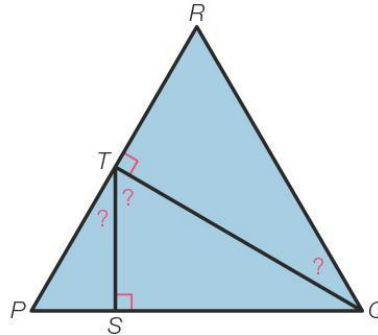
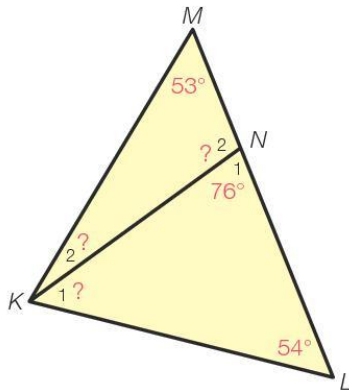
Hoeken berekenen

61

[WERKBOEK]



Bereken in $\triangle KLM$ de hoeken met een vraagteken.



62

[WERKBOEK]



$\triangle PQR$ is een gelijkzijdige driehoek.

- a Bereken $\angle RQT$.
 b Bereken $\angle PTS$.
 c Bereken $\angle STQ$.

$\angle RQT$ is $\angle Q$ in $\triangle RQT$

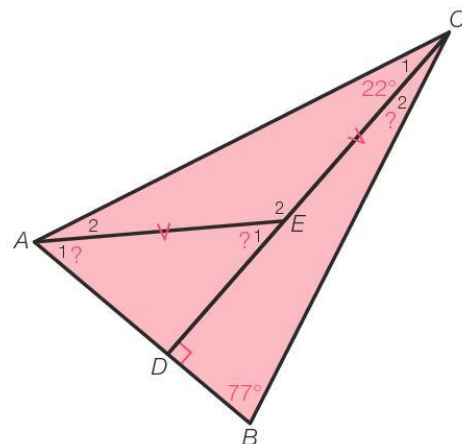
63

[WERKBOEK]



In $\triangle ABC$ is $CE = AE$.

- a Bereken $\angle C_2$.
 b Bereken $\angle E_1$.
 c Bereken $\angle A_1$.



Theorie I Symmetrie

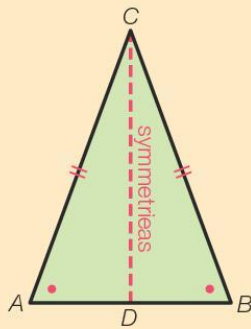
Er zijn drie soorten **symmetrie**.

Lijnsymmetrie

In de gelijkbenige driehoek ABC is CD de **symmetrieas**.

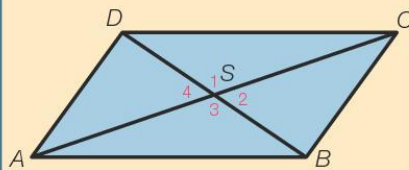
$$\angle A = \angle B$$

$$AC = BC$$



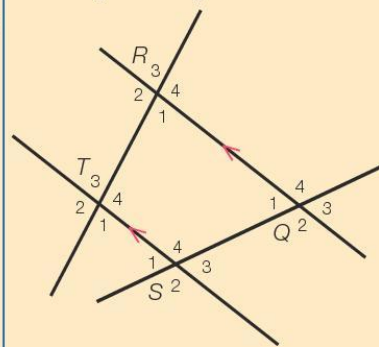
Draaisymmetrie

Punt S is het draaipunt in het parallellogram $ABCD$. $\angle A = \angle C$ en $\angle B = \angle D$. Door draaisymmetrie weet je ook $\angle S_3 = \angle S_1$ en $\angle S_2 = \angle S_4$. Het zijn overstaande hoeken.



Schuifsymmetrie

In de figuur is $ST \parallel QR$. Je kunt de hoeken bij S zo verschuiven dat ze precies passen op de hoeken bij Q . De hoeken bij R passen op de hoeken bij T . Zo is bijvoorbeeld $\angle S_1 = \angle Q_1$ en $\angle T_3 = \angle R_3$.



Voorbeeld Hoeken berekenen met symmetrie

Opgave

In $\triangle ABC$ is $AB \parallel DE$.

Bereken alle hoeken in de figuur.

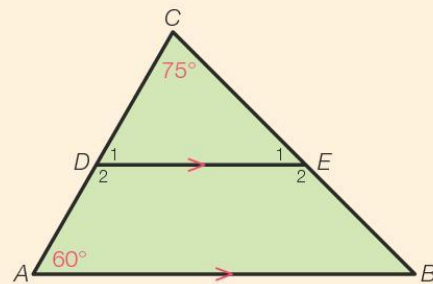
Aanpak

Bereken $\angle B$ in $\triangle ABC$.

$AB \parallel DE$ betekent AB is evenwijdig met DE .

Bij evenwijdige lijnen kun je schuifsymmetrie gebruiken, dus $\angle D_1 = \angle A$ en $\angle E_1 = \angle B$.

Bij D en E vind je gestrekte hoeken.



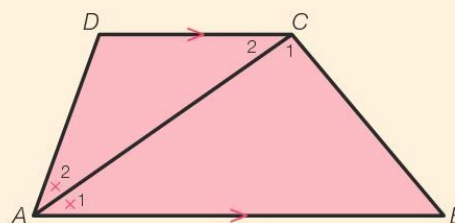
Uitwerking

- $\angle B = 180 - 60 - 75 = 45^\circ$
- $\angle D_1 = \angle A = 60^\circ$
- $\angle D_2 = 180 - 60 = 120^\circ$
- $\angle E_1 = \angle B = 45^\circ$
- $\angle E_2 = 180 - 45 = 135^\circ$

Trapezium

Test
opgave

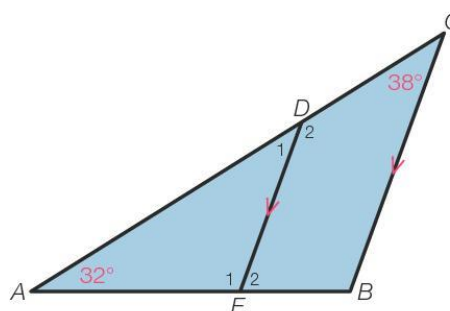
[>] [WERKBOEK] In vierhoek $ABCD$ is $AB \parallel DC$ en $\angle A_1 = \angle A_2$.
 $\angle DAB = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$ en $\angle C_2 = 35^\circ$.
 Bereken alle hoeken in de figuur.



Driehoeken

64
[>] [WERKBOEK]

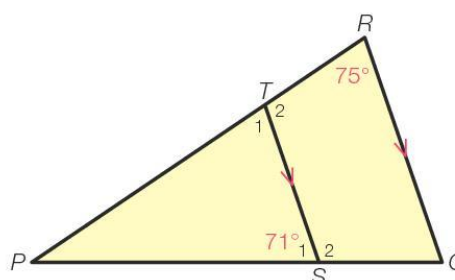
- Bereken $\angle B$ in $\triangle ABC$.
- Hoe zie je dat DE en BC evenwijdig zijn?
- Welk soort symmetrie kun je gebruiken bij evenwijdige lijnen?
- Bereken $\angle D_1$ en $\angle D_2$.
- Bereken $\angle E_1$ en $\angle E_2$.



65
[>] [WERKBOEK]

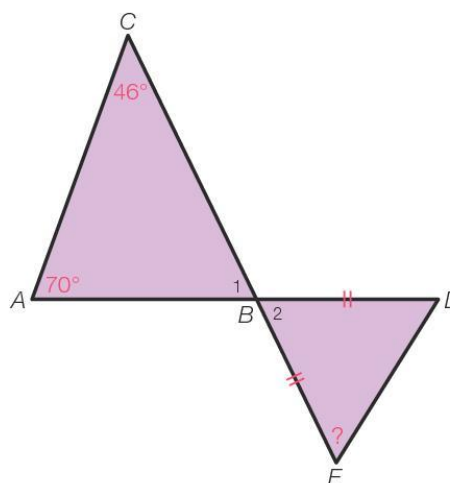
- In $\triangle PQR$ is $QR \parallel ST$.
- Welk soort symmetrie kun je gebruiken bij evenwijdige lijnen?
 - Bereken $\angle T_1$ en $\angle Q$.
 - Bereken $\angle T_2$ en $\angle S_2$.
 - Bereken $\angle P$.

$QR \parallel ST$ betekent QR is evenwijdig aan ST .



66
[>] [WERKBOEK]

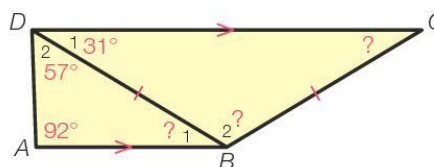
- Bereken $\angle E$.



Vierhoek

67

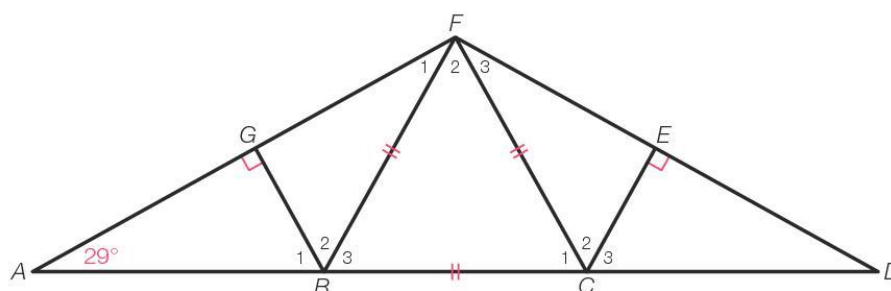
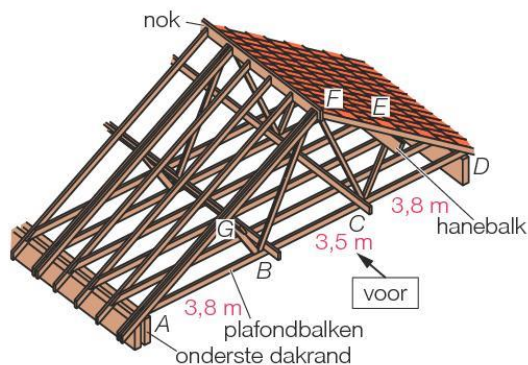

[>  WERKBOEK] Bereken de hoeken met een vraagteken.



Dakspanten

68

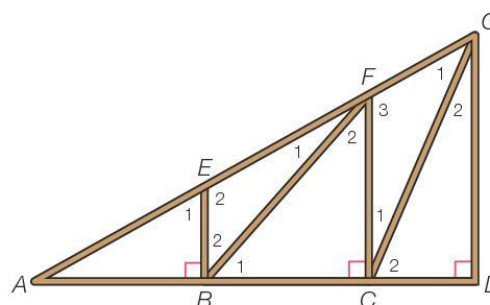

[>  WERKBOEK] In de dakspanten kun je veel driehoeken herkennen. Hieronder zie je het vooraanzicht getekend. $\triangle BCF$ is een gelijkzijdige driehoek. Bij punt G zijn rechte hoeken. Het dak is symmetrisch en $\angle A = 29^\circ$.



- Welke hoek is ook 29° ?
- Bereken $\angle B_2$.
- Bereken $\angle F_3$.
- Bereken $\angle C_3$.

69


[>  WERKBOEK] In de figuur hiernaast zie je een gedeelte van een ander dakspant. $\angle A = 30^\circ$, $\angle G_2 = 25^\circ$ en $\angle B_1 = 50^\circ$. Bereken $\angle E_2$, $\angle F_1$ en $\angle C_1$.

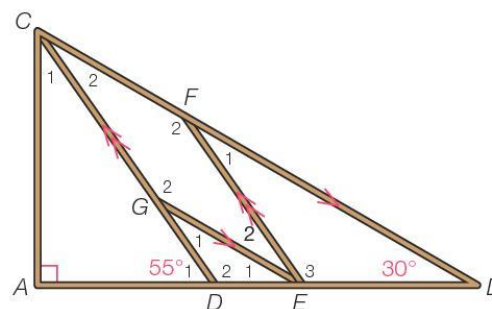


70

*

[> WERKBOEK] In de figuur hiernaast zie je een gedeelte van nog een ander dakspant.

Bereken $\angle C_2$, $\angle E_3$ en $\angle G_2$.



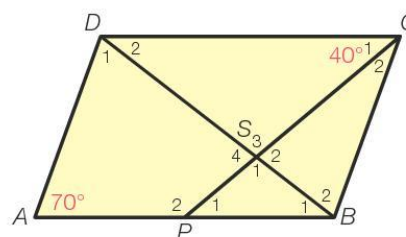
Parallelogram

71

*

[> WERKBOEK] Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram.

- Bereken $\angle D_{12}$.
- Bereken $\angle P_1$ en $\angle P_2$.
- Van $\triangle ABD$ is $AB = BD$.
Bereken $\angle D_1$ en $\angle B_1$.
- Bereken $\angle S_1$.
- Waarom is $\triangle DSC$ een gelijkbenige driehoek?



Rekenbreak



Bereken.

$$9 : 1,5$$

$$150 : 2,5$$

In Alphen aan den Rijn is op een maandag in juli 181 millimeter neerslag gevallen. Dat is 2,5 keer zoveel als normaal in de hele maand juli. Het leidde tot veel overlast.

Hoeveel neerslag valt er normaal in Alphen aan de Rijn in juli?



Woordenlijst

- | | |
|--------------------------|-------------------|
| • deellijn | • gestrekte hoek |
| • draaisymmetrie | • lijnsymmetrie |
| • gelijkbenige driehoek | • schuifsymmetrie |
| • gelijkzijdige driehoek | |

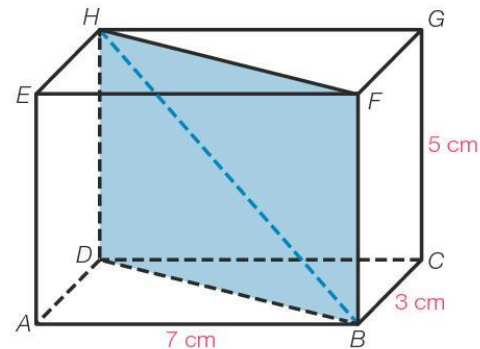
3.7 [VMBO-GT] Berekeningen in de ruimte

GT Balk

72



- In welk diagonaalvlak ligt BH ?
- Maak een schets van dat vlak.
- Bereken FH . Rond af op één decimaal.
- Bereken BH . Rond af op één decimaal.

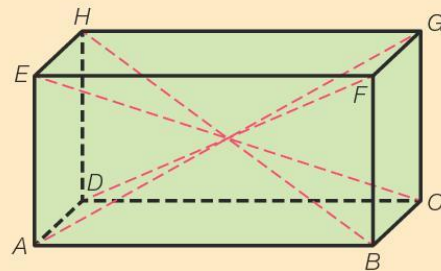


Theorie J [VMBO-GT] Pythagoras en goniometrie in de ruimte

Een balk en een kubus hebben vier **lichaamsdiagonalen**. Die gaan van een hoekpunt naar het hoekpunt er schuin tegenover. In de balk hiernaast zijn alle vier de lichaamsdiagonalen getekend: AG , BH , CE en DF . De vier lichaamsdiagonalen zijn even lang.

De lengte van een lichaamsdiagonaal kun je snel berekenen met de **verlengde stelling van Pythagoras**.

Om een hoek te berekenen met goniometrie zoek je altijd een rechthoekige driehoek.



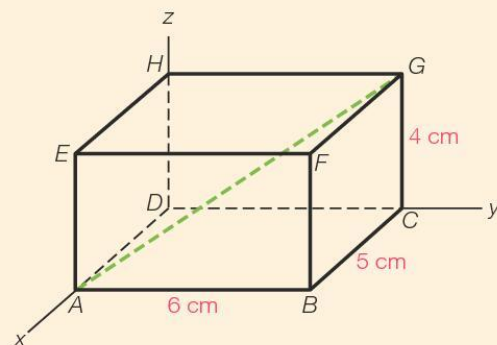
Voorbeeld Lichaamsdiagonaal en goniometrie

Opgave

Hiernaast zie je een tekening van balk $ABCD EFGH$ in een assenstelsel.

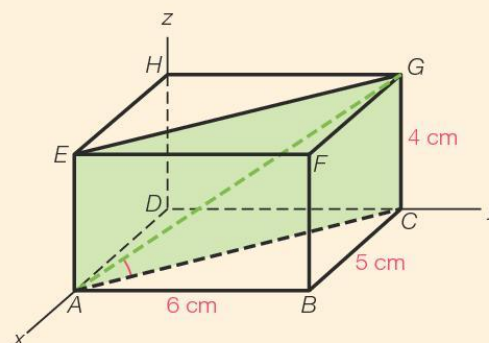
De maten staan erbij.

- Bereken AG . Rond af op één decimaal.
- Bereken $\angle CAG$.



Aanpak

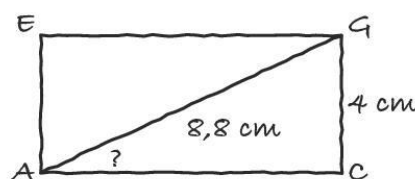
- a** Ga van A naar G via drie ribben.
Bijvoorbeeld $AB \rightarrow BC \rightarrow CG$.
De lengte van deze drie ribben gebruik je om AG te berekenen.
- b** $\angle CAG$ ligt in diagonaalvlak $ACGE$.
Maak een schets van dat diagonaalvlak.
Teken AG .
Van $\angle CAG$ weet je de overstaande rechthoekszijde en de schuine zijde, **SOS**, gebruik dus sinus.



Uitwerking

- a** $rhz^2 = 36$
 $rhz^2 = 25$
 $rhz^2 = 16$

 $? sz^2 = 77$
 $sz = \sqrt{77} = 8,774...$
 $AG = 8,8 \text{ cm}$
- b** $\sin \angle CAG = \frac{4}{8,8}$
 $\angle CAG = 27^\circ$

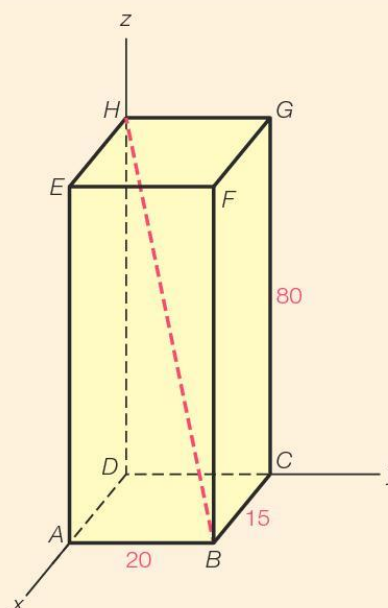


61 Lichaamsdiagonaal en hoek

Test opgave

Hiernaast zie je een tekening van balk $ABCD EFGH$ in een assenstelsel. De maten in centimeters staan erbij.

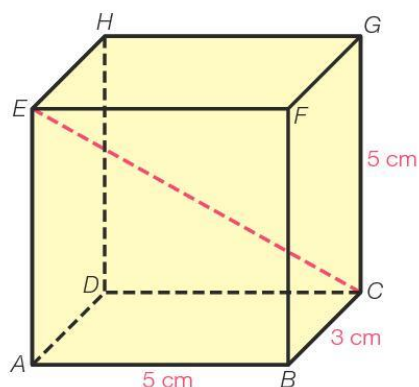
- a** Bereken BH met de verlengde stelling van Pythagoras.
- b** Bereken $\angle DBH$.



Verlengde Pythagoras

73

- a** Over welke drie ribben kun je van hoekpunt C naar hoekpunt E ? Hoe lang zijn die ribben?
- b** Bereken de kwadraten van die ribben en tel ze op.
- c** Kies drie andere ribben om van hoekpunt C naar hoekpunt E te gaan. Hoe lang zijn die ribben?
- d** Bereken de kwadraten van die ribben en tel ze op.
- e** Zijn de antwoorden van vraag b en vraag d gelijk?
Zo ja, dan heb je het goed gedaan. Zo nee, zoek uit waar de fout zit.



74

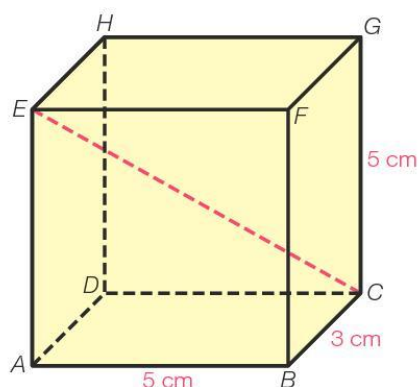
- Gebruik de balk van de vorige opgave. Bereken de lengte van CE . Gebruik de verlengde stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.

$$\begin{aligned} rhz^2 &= \\ rhz^2 &= \\ rhz^2 &= \\ \hline + \\ ? sz^2 &= \\ sz &= \sqrt{\dots} = \dots \\ CE &= \dots \text{cm} \end{aligned}$$

Hoek berekenen

75

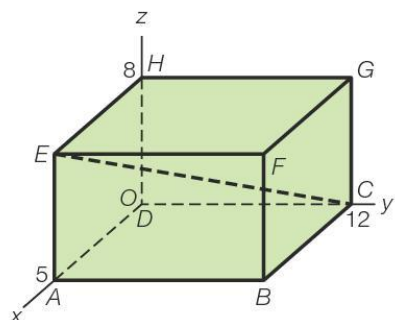
- a** Maak een schets van diagonaalvlak $ACGE$.
- b** Teken CE in de schets. Zet alle maten erbij die je weet. Gebruik ook het antwoord van de vorige opgave.
- c** Zet een vraagteken in $\angle AEC$.
- d** Bereken $\angle AEC$. Gebruik de cosinus.



76

Hiernaast zie je een balk in een driedimensionaal assenstelsel. De maten zijn in centimeters.

- a** Hoe lang zijn de ribben AB , BC en AE ?
- b** Bereken de lengte van CE . Rond af op één decimaal.
- c** In welk diagonaalvlak ligt $\angle ACE$?
- d** Maak een schets van dit diagonaalvlak.
- e** Bereken $\angle ACE$.

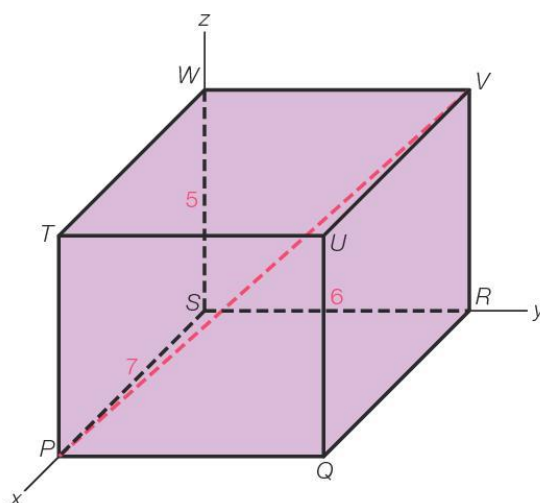


Lichaamsdiagonaal en hoek

77
□ ⊗ *

Hiernaast zie je een tekening van balk $PQRS TUVW$ in een assenstelsel. De maten in centimeters staan erbij.

- Bereken de lengte van PV . Rond af op één decimaal.
- Bereken $\angle PVR$.



Zonder tekening

78
⊗ *

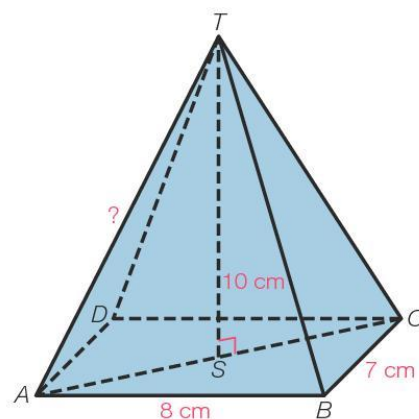
- Bereken de lichaamsdiagonaal van kubus $ABCD EFGH$ met ribben van 12 cm.
- Bereken $\angle DBH$.

Piramide

79
□ ⊗ *

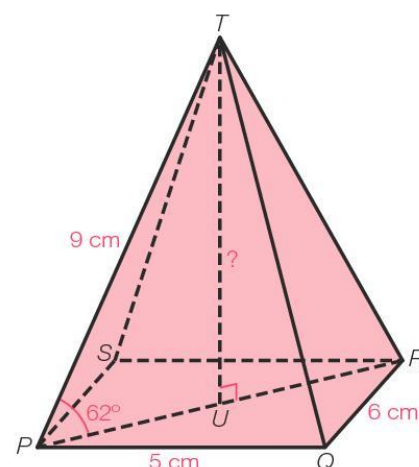
Piramide $T ABCD$ heeft een rechthoekig grondvlak. $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm en de hoogte $ST = 10$ cm.

- Bereken AC . Rond af op twee decimalen.
- Bereken AS . Rond af op één decimaal.
- Bereken $\angle SAT$.



80
□ ⊗ *

Piramide $T PQRS$ heeft een rechthoekig grondvlak. $PQ = 5$ cm, $QR = 6$ cm, $PT = 9$ cm en $\angle TPR = 62^\circ$. Bereken de hoogte TU . Rond af op één decimaal.

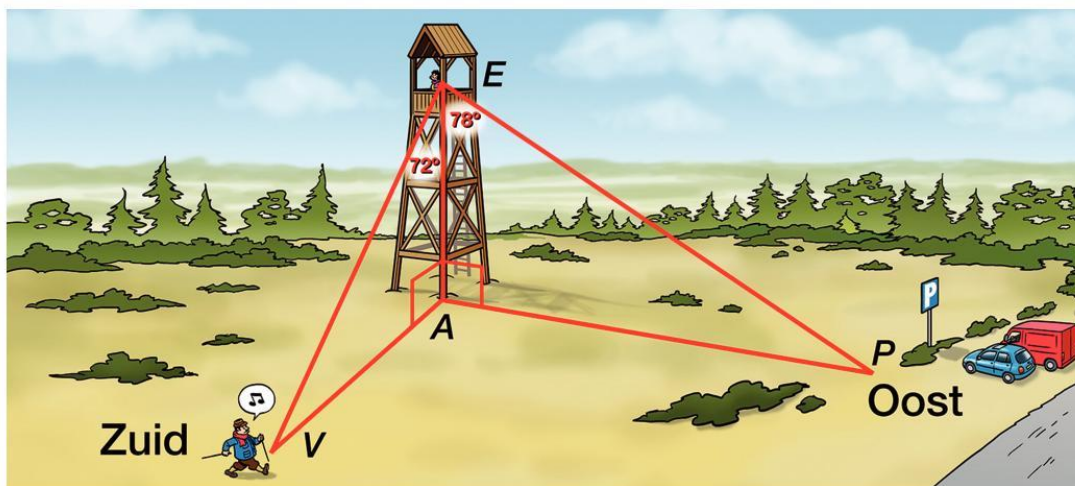


Uitkijktoren

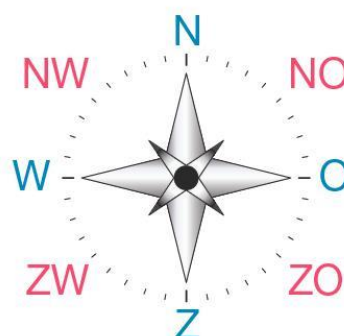
81



Elly staat op een uitkijktoren. Zij kijkt vanaf een hoogte van 40 m. Zij ziet haar vader in het zuiden. De parkeerplaats ligt ten oosten van de toren.



- Maak een schets van $\triangle AEV$.
- Hoe ver staat Elly's vader van de toren? Rond af op hele meters.
- Hoe ver is de parkeerplaats van de toren? Rond af op hele meters.



82



- Waarom is $\angle A$ in $\triangle VAP$ een rechte hoek?
- Maak een schets van $\triangle VAP$.
- Elly's vader loopt naar de parkeerplaats. Hoeveel meter is dat?

Raam

83



Een raam staat open. De uitzethaak BC maakt een hoek van 68° met het kozijn AB . Het raam is 90 cm breed.

- Waarom is $\triangle ABC$ een gelijkbenige driehoek?
- Maak een schets van $\triangle ABC$.
- Verdeel $\triangle ABC$ in twee rechthoekige driehoeken.
- Bereken de lengte van de uitzethaak BC . Rond af op één decimaal.



Theorie K [VMBO-GT] Over drie ribben

Zodra je in een kubus of balk over drie ribben of gedeeltes van ribben van het begin naar het eind van een lijnstuk kunt gaan, kun je de lengte van dat lijnstuk berekenen met de verlengde stelling van Pythagoras. Je gebruikt de kortste route. Hoe dat gaat zie je in het voorbeeld.

Voorbeeld Over drie ribben

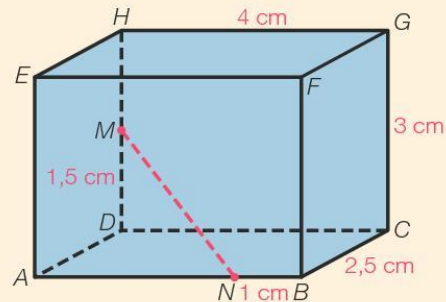
Opgave

Bereken de lengte van NM in één decimaal.

Aanpak

Ga van N naar M over drie ribben of gedeeltes van ribben, dus:

$NA \rightarrow AD \rightarrow DM$.



Uitwerking

$$\begin{aligned}
 & \text{ } rhz^2 = 9 \\
 & \text{ } rhz^2 = 6,25 \\
 & \text{ } rhz^2 = 2,25 \\
 & \hline
 & ? sz^2 = 17,5 \\
 & sz = \sqrt{17,5} = 4,183... \\
 & NM = 4,2 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

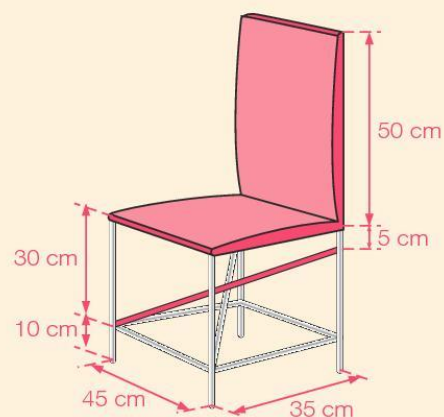
GT

Stoel

Test
opgave

De eetkamerstoel is gemaakt van stukken staaldraad. Bereken de lengte van de rode staaldraad.

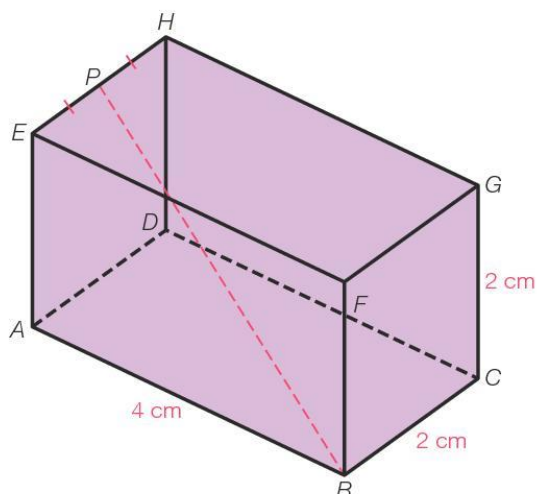
Rond af op één decimaal.



84

[>] WERKBOEK

- a** Kleur de route over drie ribben of gedeelten daarvan van hoekpunt B naar punt P . Begin met BA .
- b** Hoe zie je dat punt P het midden van ribbe EH is?
- c** Vul in: $BA = \dots$ cm
 $AE = \dots$ cm
 $EP = \dots$ cm
- d** Bereken BP . Gebruik de verlengde stelling van Pythagoras. Rond af op twee decimalen.

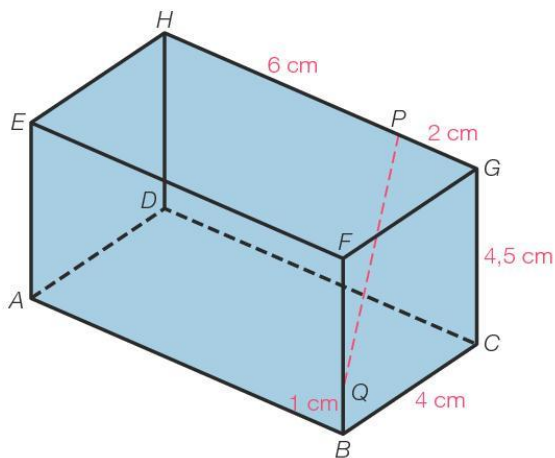


$$\begin{aligned} rhz^2 &= \\ rhz^2 &= \\ rhz^2 &= \\ \hline &+ \\ ? sz^2 &= \\ sz &= \sqrt{\dots} = \dots \\ BP &= \dots \text{ cm} \end{aligned}$$

85

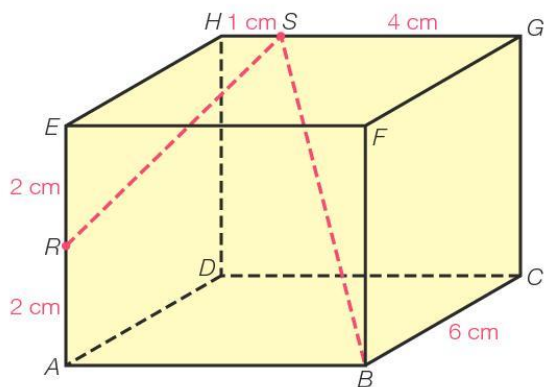
[>] WERKBOEK

- a** Kleur de route over drie ribben of gedeelten daarvan van punt P naar punt Q .
- b** Vul in: $PG = \dots$ cm
 $GF = \dots$ cm
 $FQ = \dots$ cm
- c** Bereken PQ . Gebruik de verlengde stelling van Pythagoras. Rond af op één decimaal.



86

Bereken de lengte van BS en RS .
 Rond steeds af op één decimaal.

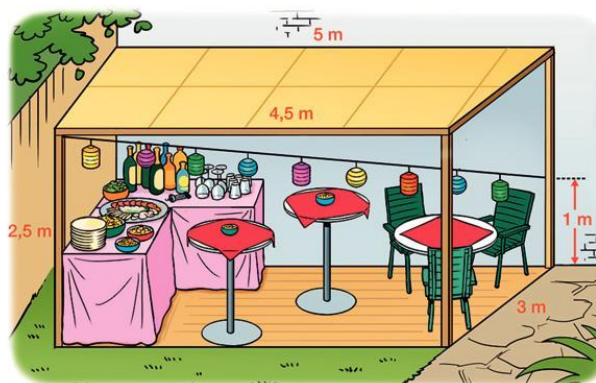


Tuinfeest

87



Kendra geeft een tuinfeest. Onder de overkapping hangt zij lampionnen aan een draad. Bereken de lengte van de draad.



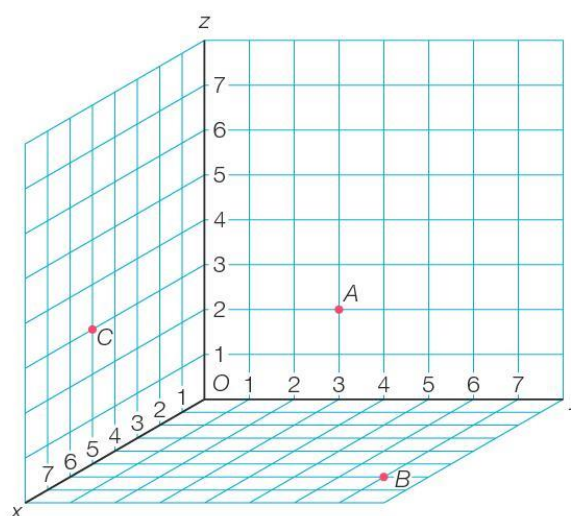
Coördinaten in de ruimte

88



[> **WERKBOEK**] In het driedimensionale assenstelsel is elk roostervierkant 1 bij 1 cm.

- Teken driehoek ABC .
- Bereken AB .
- Bereken de omtrek van driehoek ABC . Rond af op hele centimeters.



Rekenbreak

Hiernaast zie je de temperaturen in Upernavik, Groenland.

Bereken de gemiddelde maximumtemperatuur van 24 september tot en met 30 september.

Bereken de gemiddelde minimumtemperatuur van 24 september tot en met 30 september.

Datum	Weer	Min.Temp	Max.Temp
wo 24 09		-2°C	2°C
do 25 09		+1°C	1°C
vr 26 09		-2°C	0°C
za 27 09		-3°C	-2°C
zo 28 09		-5°C	-3°C
ma 29 09		-6°C	-3°C
di 30 09		-8°C	-3°C

Woordenlijst

- lichaamsdiagonaal
- verlengde stelling van Pythagoras
- over drie ribben

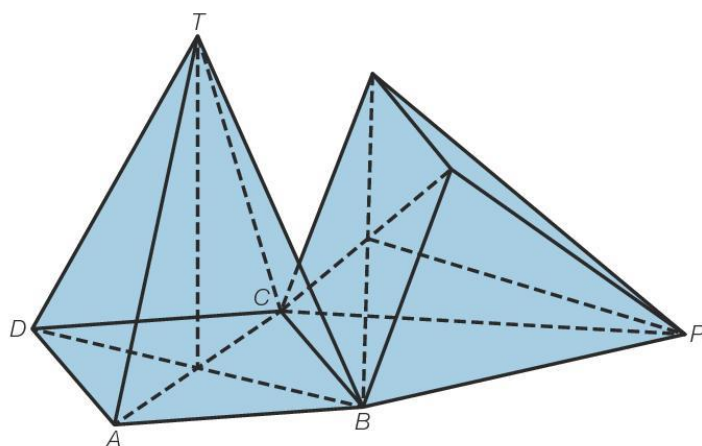
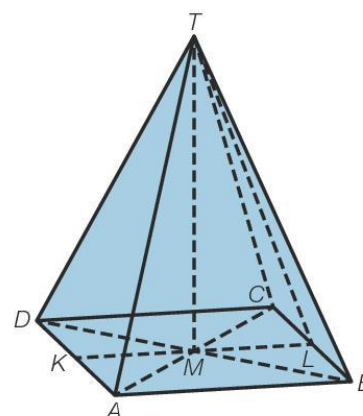
3.8 Trainen op examenniveau

Piramide kantelen

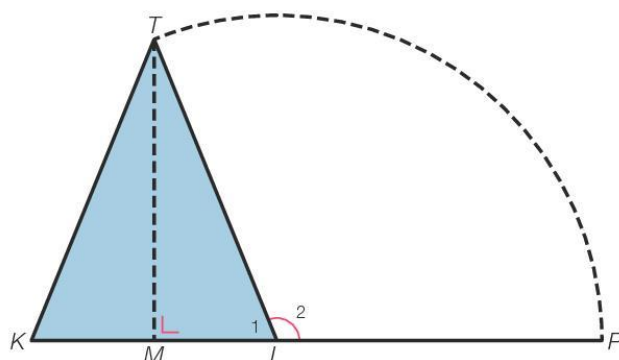
Een piramide staat op een tafel. Het grondvlak van de piramide is een vierkant met zijden van 9 cm. L is het midden van zijde BC van het grondvlak. De lengte van TL is 12 cm.

- 89** Bereken in cm de hoogte TM van de piramide. Rond je antwoord af op één decimaal.

De piramide wordt gekanteld om ribbe BC van het grondvlak. De top van de piramide komt dan op het tafelblad te liggen. Zie de tekening hieronder.



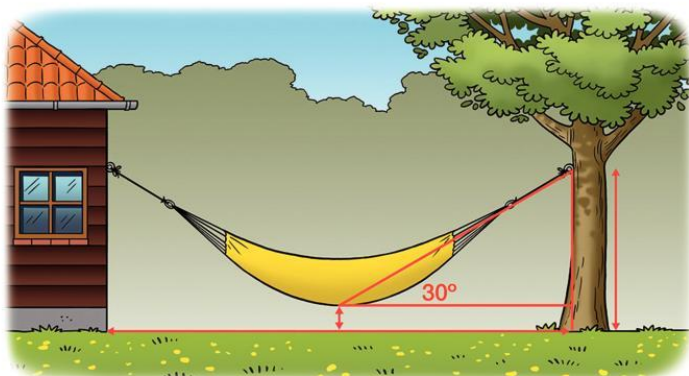
Hieronder is een doorsnede van de piramide getekend. In deze doorsnede is met het punt P aangegeven waar de top op het tafelblad terecht komt. $\angle L_2$ is de draaiingshoek bij deze kanteling.



- 90** Laat met een berekening zien dat hoek $\angle L_2$ afgerond 112° is.

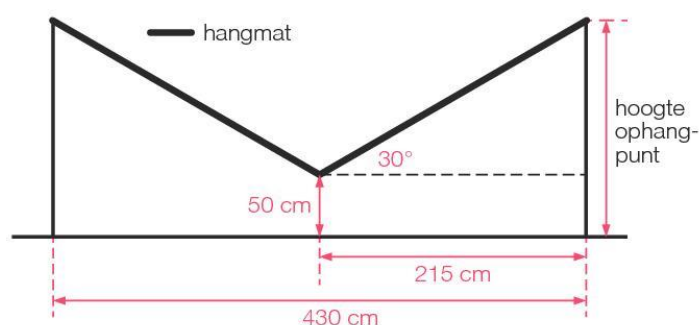
- 91 [WERKBOEK] In je werkboek staat een tekening van driehoek KLT en het punt P . Als de piramide gekanteld wordt, komt de top T in het punt P terecht. De boog TP is een deel van een cirkel. Na de kanteling is uit driehoek KLT driehoek $K'LP$ ontstaan. Teken driehoek $K'LP$ in deze figuur. Laat duidelijk zien hoe je de plaats van punt K' hebt gevonden.

Hangmat



Lex wil een hangmat ophangen in zijn tuin. Hij gaat de hangmat tussen zijn huis en een boom hangen. De hoek waaronder de hangmat komt te hangen is 30° . Zie de afbeelding hiernaast.

De afstand tussen het huis en de boom is 430 cm. Lex wil dat de hangmat 50 cm boven de grond komt te hangen.

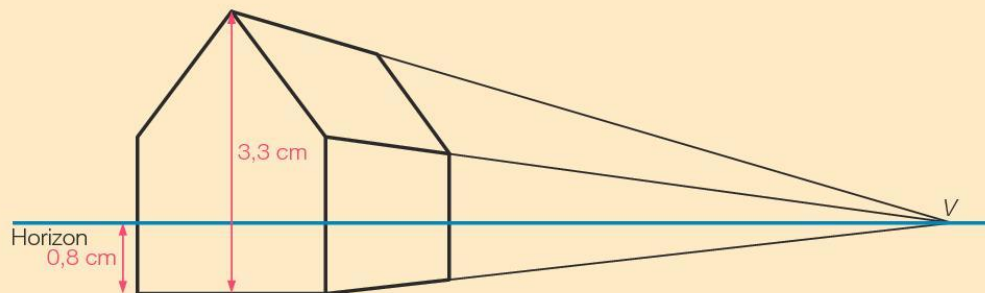


- 92 Bereken, zonder te meten, hoeveel cm de lengte van de hangmat is. Schrijf je berekening op.
- 93 Bereken, zonder te meten, hoeveel cm de hoogte van het ophangpunt moet zijn. Schrijf je berekening op.
- 94 [WERKBOEK] Lex heeft ook een kortere hangmat. Hij hangt deze hangmat op aan dezelfde ophangpunten. Hierdoor verandert de afstand van 50 cm boven de grond en verandert de hoek van 30° . Omcirkel in je werkboek de juiste woorden.

Samenvatting

3.1 Teken in perspectief

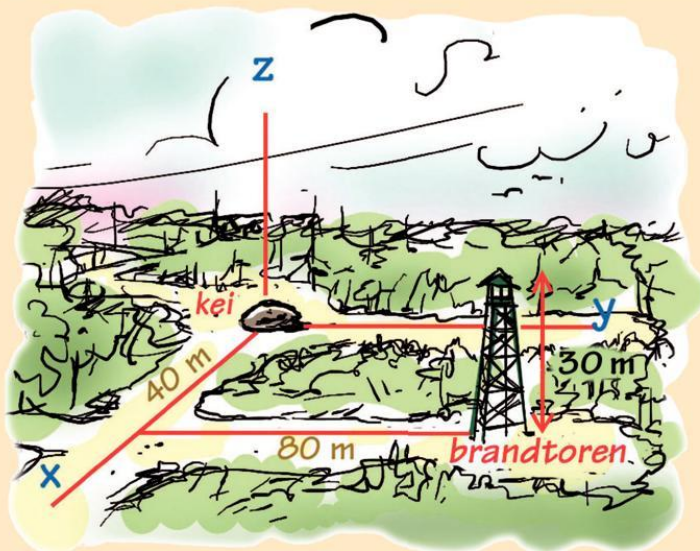
- blz 116 Het huis is in perspectief getekend. De evenwijdige lijnen die in werkelijkheid van je af lopen, snijden elkaar in het verdwijnpunt V op de horizon. Verticale lijnen blijven verticaal.



- blz 120 De horizon is op ooghoogte, dus ongeveer 1,50 m.
Van de onderkant van het huis naar de horizon is 0,8 cm.
Van de onderkant van het huis naar de punt van het huis is 3,3 cm.
De hoogte van het huis is $3,3 : 0,8 = 4,125$ keer ooghoogte.
 $4,125 \times 1,5 = 6,187...$
Het huis is ongeveer 6 m hoog.

3.2 Coördinaten in de ruimte

- blz 125 Een punt in de ruimte geef je aan met drie coördinaten.
De brandtoren is 30 m hoog.
Vanaf de kei naar de top van de brandtoren ga je
- 40 m in de x -richting
 - 80 m in de y -richting
 - 30 m in de z -richting.
- De top van de brandtoren heeft dus de coördinaten (40, 80, 30).

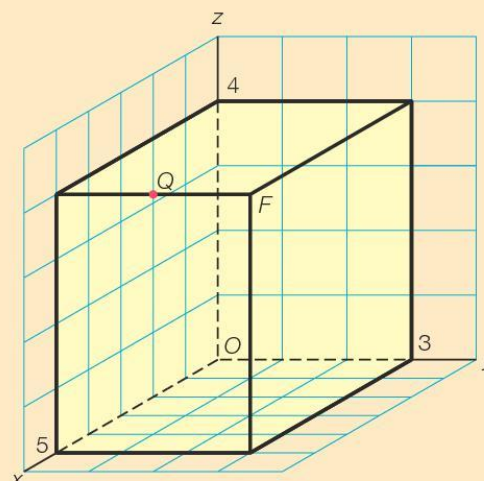


blz 127 [VMBO GT] Om een punt in de ruimte aan te geven heb je drie coördinaten nodig.

Voor punt Q ga je

- 5 stappen in de x -richting
- $1\frac{1}{2}$ stap in de y -richting
- 4 stappen in de z -richting.

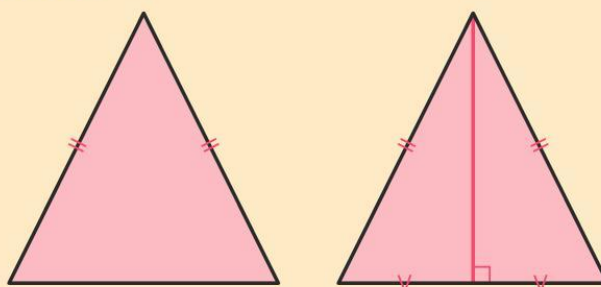
Dus $Q(5, 1\frac{1}{2}, 4)$.



3.3 Zijden berekenen in een driehoek

blz 131 Krijg je de opdracht om in een driehoek de lengte van een zijde te berekenen, denk dan aan symmetrie en gelijkvormigheid. Is de driehoek een rechthoekige driehoek, denk dan ook nog aan de stelling van Pythagoras en goniometrie, dus sinus, cosinus en tangens.

Soms moet je hulplijnen tekenen om een rechthoekige driehoek te krijgen.



3.4 Hellingspercentage

blz 138 Bij steile hellingen staat vaak een waarschuwingsbord met daarop een hellingspercentage.

$$\text{hellingspercentage} = \tan \text{ hellingshoek} \times 100$$

Een hellingspercentage rond je af op een geheel getal.

Weet je het hellingspercentage, dan kun je de hellingshoek berekenen. Daarvoor bereken je dan eerst de tangens.

$$\tan \text{ hellingshoek} = \text{hellingspercentage} : 100$$

3.5 Goniometrie en hoeken

blz 142 $\sin \angle B = \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10}$

$\cos \angle B = \frac{\text{Aanliggende rechthoekszijde}}{\text{Schuine zijde}} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10}$

$\tan \angle B = \frac{\text{Overstaande rechthoekszijde}}{\text{Aanliggende rechthoekszijde}} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6}$

Gebruik het ezelsbruggetje **SOSCASTOA**.

Weet je de sinus, cosinus of tangens van een hoek in een rechthoekige driehoek? Dan kun je die hoek berekenen.

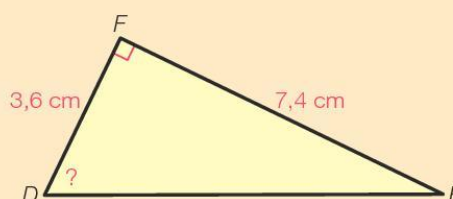
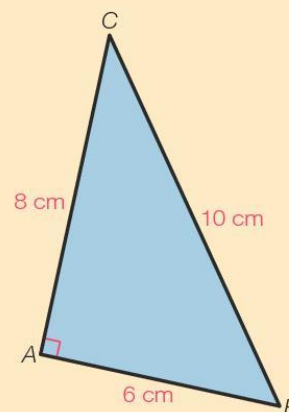
Je gebruikt dan de knoppen $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ of

$\tan^{-1}$ van je rekenmachine.

Om $\angle D$ te berekenen tik je in

$\tan^{-1} \frac{7,4}{3,6} \text{) } =$

De uitkomst is 64,057....., dus $\angle D = 64^\circ$.



3.6 Hoeken in vlakke figuren

blz 146 Bij het berekenen van een hoek gebruik je de volgende eigenschappen.

De drie hoeken in een driehoek zijn samen 180° .	In een gelijkzijdige driehoek zijn alle hoeken 60° .	In een gelijkbenige driehoek zijn twee hoeken gelijk.
In een rechthoekige driehoek is één hoek 90° .	Hoeken die een gestrekte hoek vormen zijn samen 180° .	Een deellijn deelt een hoek doormidden.

blz 149 Ook met symmetrie kun je hoeken berekenen. Er zijn drie soorten symmetrie.

Lijnsymmetrie	Draaisymmetrie	Schuifsymmetrie

3.7 [VMBO GT] Berekeningen in de ruimte

blz 153

Met de verlengde stelling van Pythagoras kun je afstanden in ruimtefiguren berekenen.

Om BH te berekenen ga je van B naar H over drie ribben.

$BC \rightarrow CG \rightarrow GH$

$$rhz^2 = 16$$

$$rhz^2 = 9$$

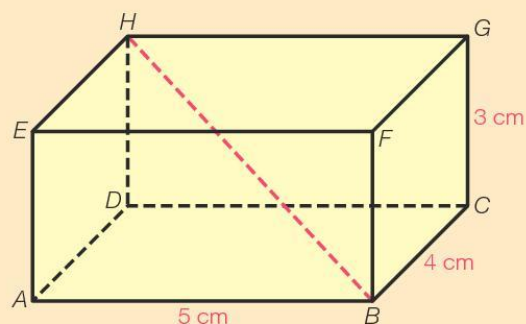
$$rhz^2 = 25$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 50$$

$$sz = \sqrt{50} = 7,071...$$

$$BH = 7,1 \text{ cm}$$



In piramide $TABCD$ kun je $\angle TAS$ berekenen.

Je berekent dan eerst AC met de stelling van Pythagoras.

$$rhz^2 = 16$$

$$rhz^2 = 16$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 32$$

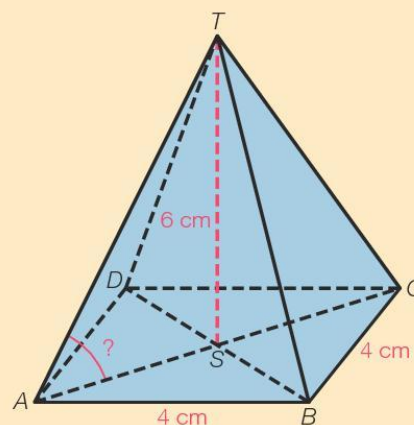
$$sz = \sqrt{32} = 5,656...$$

$$AC = 5,66 \text{ cm}$$

$$AS = 0,5 \times 5,66 = 2,83 \text{ cm}$$

$$\tan \angle TAS = \frac{6}{2,83}$$

$$\angle TAS = 65^\circ$$



blz 158

Om NM te berekenen ga je van N naar M over drie ribben of gedeelten daarvan.

$NQ \rightarrow QR \rightarrow RM$

$$rhz^2 = 25$$

$$rhz^2 = 9$$

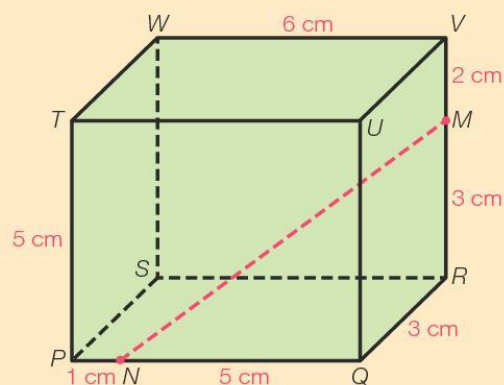
$$rhz^2 = 9$$

$$\frac{\quad}{\quad} +$$

$$? sz^2 = 43$$

$$sz = \sqrt{43} = 6,557...$$

$$NM = 6,6 \text{ cm}$$



D-toets

3.1 Teken in perspectief

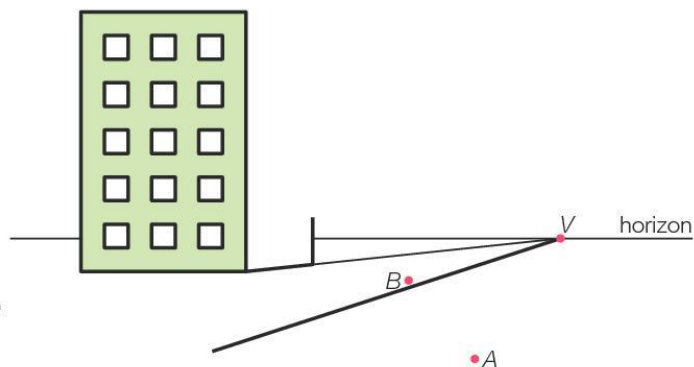
1 Teken een kubus in perspectief.

Theorie A

2 [WERKBOEK]

Theorie B

- Teken de rechterkant van de weg in perspectief. Begin bij *A*.
- Teken bij *B* een lantaarnpaal van 6 m hoog.
- Hoe hoog is het kantoorgebouw ongeveer?
- Maak het gebouw af.

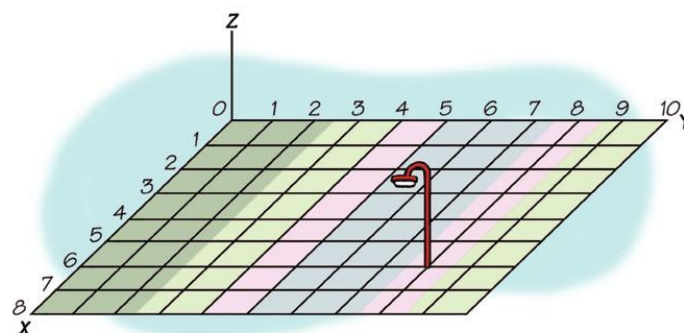


3.2 Coördinaten in de ruimte

3 De lantaarnpaal is 4,20 m hoog.

Theorie C

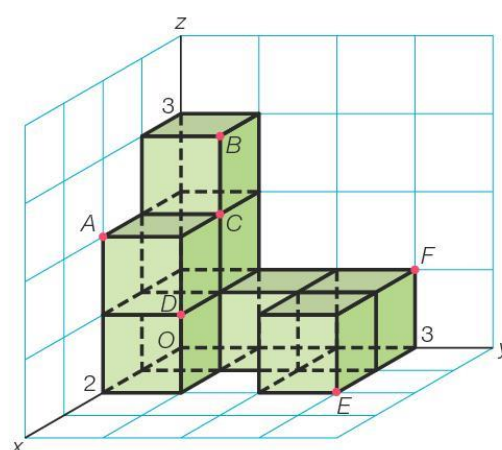
Schrijf de coördinaten op van de top van de lantaarnpaal.



4 Welk punt hoort bij de coördinaten (1, 1, 2)?

Theorie D

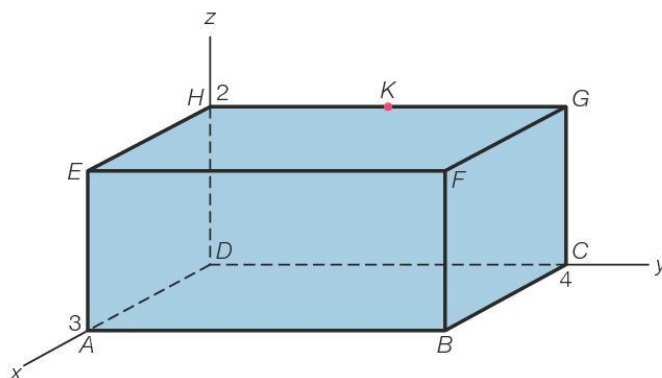
b Schrijf de coördinaten van de andere punten op.



5
Theorie D

van balk $ABCD EFGH$ staat het hoekpunt D in de oorsprong.

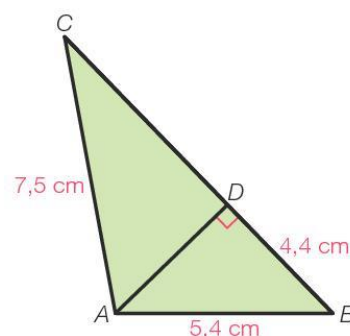
- Welke coördinaten horen bij hoekpunt B ?
- Punt K is het midden van ribbe GH . Welke coördinaten horen bij punt K ?
- In dezelfde ruimte is een punt $L(4, 2, 1)$. Waar ligt dat punt?
Kies uit: *in de balk*, *op een van de zijvlakken van de balk*, *buiten de balk*.



3.3 Zijden berekenen in een driehoek

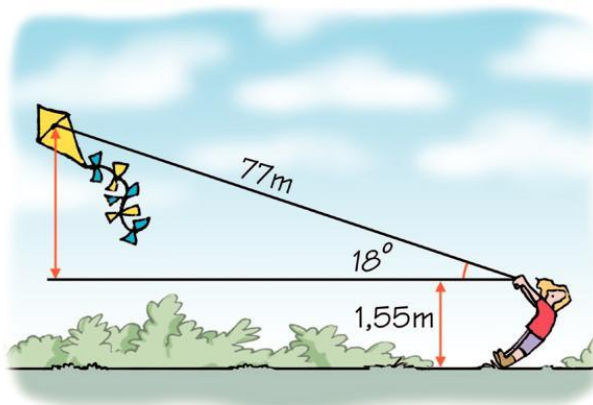
6
Theorie E

Bereken zijde CD .
Rond af op één decimaal.



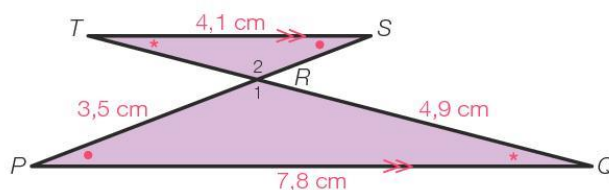
7
Theorie E

- Elaine is aan het vliegeren. Hoe hoog staat de vlieger?
- Het gaat harder waaien. De vlieger gaat steeds hoger. De hoek wordt nu 40° . Hoe hoog staat de vlieger nu?



8
Theorie E

- Bereken de lengte van RT . Rond af op één decimaal.
- Bereken de lengte van RS . Rond af op één decimaal.



9
Theorie E

De twee delen van de ladder staan 130 cm uit elkaar.

Van beide delen is de hellingshoek 72° .

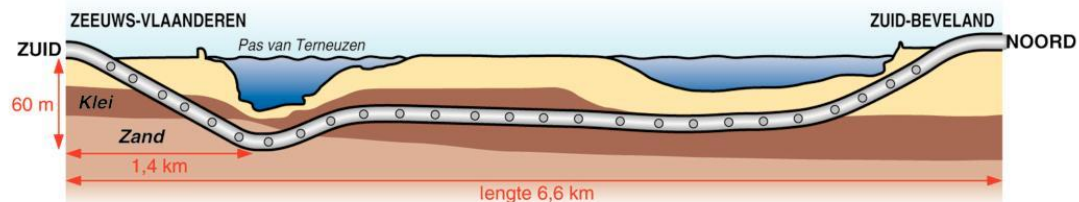
- Op welke hoogte zit de top van de ladder? Rond af op hele cm.
- Hoe lang is elk deel van de ladder? Rond af op hele cm.



3.4 Hellingspercentage

10
Theorie F

- Het steilste gedeelte van de Westerscheldetunnel bevindt zich aan de kant van Zeeuws-Vlaanderen. Bereken het hellingspercentage van dit stuk.

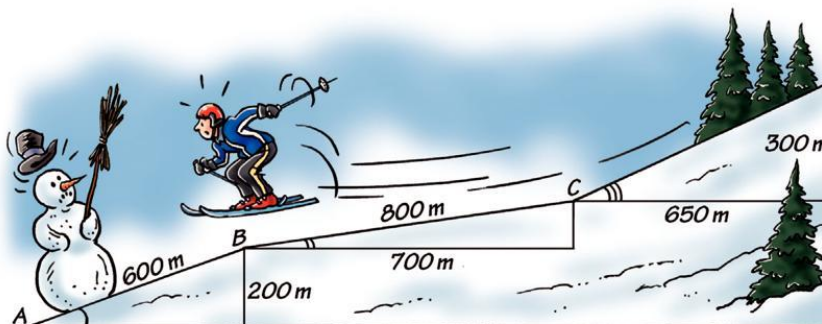


- Het hellingspercentage aan de kant van Zuid-Beveland is 2,6%. Bereken de hellingshoek.

11
Theorie F

- Een skihelling is 1200 m lang. De helling heeft een percentage van 11%. Bereken het hoogteverschil.

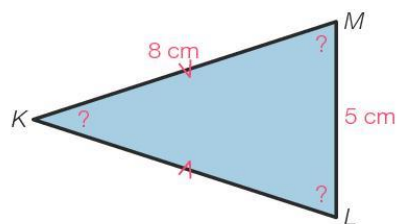
3.5 Goniometrie en hoeken



12
Theorie G

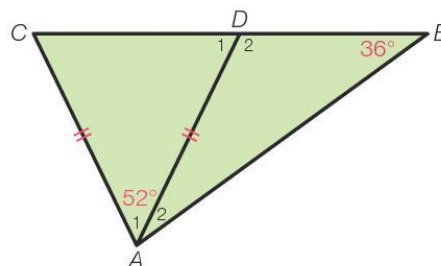
- Bereken de hoeken bij A, bij B en bij C.

- 13** Bereken de hoeken K , L en M in de gelijkbenige driehoek KLM .



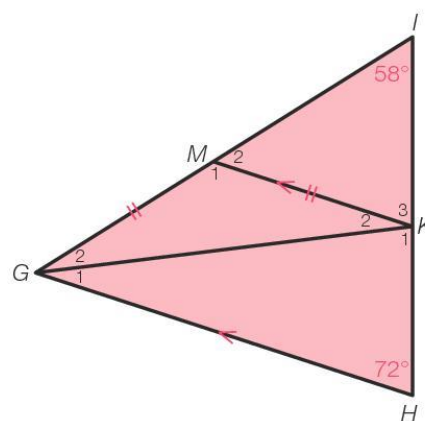
3.6 Hoeken in vlakke figuren

- 14** In de figuur is $\angle A_1 = 52^\circ$ en $\angle B = 36^\circ$. Verder is $AC = AD$. Bereken de andere hoeken.

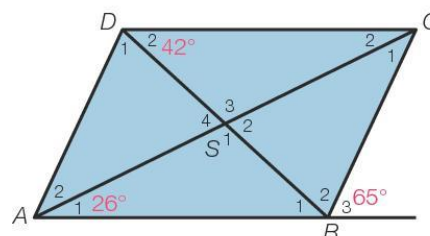


- 15** Van een $\triangle PQR$ is $PR = QR$ en $\angle R = 65^\circ$. Bereken $\angle P$ en $\angle Q$.

- 16** Van $\triangle GHI$ weet je $\angle H = 72^\circ$ en $\angle I = 58^\circ$. Verder is $GM = KM$ en $GH \parallel KM$. Bereken de andere hoeken.



- 17** Vierhoek $ABCD$ is een parallellogram.
- Bereken $\angle A_2$.
 - Bereken $\angle S_1$.
 - Bereken $\angle C_1$.



3.7 [VMO-GT] Berekeningen in de ruimte

- 18**
- Bereken de lengte van de lichaamsdiagonaal BH .
 - Bereken $\angle DBH$.

- 19** Bereken de lengte van PQ .

