

Wiskunde A Examen

A. Algemeen: wiskundige vaardigheden

1. Wiskundige vaardigheden

Naam	Bewerking	Resultaat	Omgekeerd	Bewerking	Resultaat
Optellen	$A + B = C$	Som	Aftrekken	$C - B = A$	Verskil
Vermenigvuldigen	$A \cdot B = C$	Product	Delen	$C/B = A$	Quotiënt
Machtsverheffen	$A^b = C$	Macht	Worteltrekken	$\sqrt[b]{C} = A$	Wortel

De basis-wiskundige bewerkingen zijn optellen, vermenigvuldigen en machtsverheffen. De uitkomsten hiervan zijn som, product en macht.

Deze bewerkingen hebben ook een omgekeerde bewerking; aftrekken, delen en worteltrekken. De uitkomsten hiervan zijn verschil, quotiënt en wortel.

- **Factor:** naam van getal waarmee je een ander getal, variabele of formule vermenigvuldigt.

Voorrangsregels:

Prioriteit	Wat	Notatie
1	Alles tussen haakjes	()
2	Machtsverheffen en worteltrekken	X^n & $\sqrt[n]{}$
3	Vermenigvuldigen en delen	$\cdot$ & $\div$
4	Optellen en aftrekken	$+$ & $-$

- **Breuk:** van vorm $\frac{a}{b}$ waarbij a en b hele getalen zijn

a $\rightarrow$ teller en b $\rightarrow$ noemer

Breuken moeten gelijknamig (dezelfde noemer) zijn bij optellen/aftrekken. Je kunt ze vaak dan ook vereenvoudigen.

Als noemers verschillend zijn, moet je breuken eerst gelijknamig maken, zodat je dezelfde noemer krijgt. Dit doe je door de teller en noemer te vermenigvuldigen met hetzelfde getal tot beide breuken dezelfde noemer hebben.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{D \cdot A}{D \cdot B} + \frac{B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{AD + BC}{B \cdot D}$$

Om een breuk bij een geheel getal op te tellen maak je van het gehele getal een breuk door als noemer 1 te nemen. Daarna kun je de breuken gelijknamig maken.

$$\frac{A}{B} + C = \frac{A}{B} + \frac{C}{1} = \frac{A}{B} + \frac{BC}{B} = \frac{A + BC}{B}$$

❖ **Vereenvoudig breuken zoveel mogelijk**

❖ **Helen naar buiten halen(hoeft niet per se)**

Bij vermenigvuldigen van breuken vermenigvuldig je telkens tellers met elkaar en noemers met elkaar. Breuken hoeven hier geen gelijke noemers te hebben.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Bij vermenigvuldigen van breuken met een geheel getal geldt:

$$A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A}{1} \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$$

Bij delen van breuken hoeven noemers niet hetzelfde te zijn. Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met *omgekeerde* van breuk.

$$\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Hierbij is de vermenigvuldiging met $\frac{D}{C}$ het omgekeerde van de deling door $\frac{C}{D}$. Voor het delen van een breuk door een geheel getal geldt:

$$\frac{A}{B} \div \frac{1}{C} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{1} = \frac{A \cdot C}{B}$$

Bij een breuk kan je altijd de teller en de noemer vermenigvuldigen met hetzelfde getal, omdat een breuk met dezelfde teller en noemer gelijk is aan 1 (vb. $\frac{3}{3}$) en bij vermenigvuldigen met 1 verandert er niets. Dit gebruik je voor het gelijknamig maken van breuken en om breuken makkelijker te maken of helemaal weg te werken.

Voor het vermenigvuldigen van wortels geldt: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB} \rightarrow A, B \geq 0$. Je kunt deze regel ook gebruiken voor het vereenvoudigen van wortels.

❖ **Je mag niet de wortel van een negatief getal nemen**

Dit kan niet, omdat als je negatieve wortels met zichzelf vermenigvuldigt het resultaat positief is (negatief-negatief $\rightarrow$ positief).

Voor wortels en breuken geldt: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \rightarrow A \geq 0$ en $B > 0$. Dit betekent dat de wortel van een breuk gelijk is aan de wortel van de teller gedeeld door de wortel van de noemer. Dit kan alleen als de teller ≥ 0 en de noemer > 0 is.

Bij wortels geldt dat wanneer $\sqrt{A} = B$, dan is A gelijk aan B^2 , waarbij $B \geq 0$. Dit kun je gebruiken om vergelijkingen met wortels op te lossen.

Machtsverheffen is het herhaald vermenigvuldigen van een term met zichzelf. De bekendste macht is de tweede macht (kwadraat).

- **Grondtal**: getal dat wordt vermenigvuldigd met zichzelf
- **Exponent**: hierin wordt weergegeven hoe vaak het grondtal wordt vermenigvuldigd met zichzelf

Bij het rekenen met machten gelden de volgende rekenregels;

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------|
| 1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ | 5. $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$ |
| 2. $a^p / a^q = a^{p-q}$ | 6. $a^1 = a$ |
| 3. $(a^p)^q = a^{(p \cdot q)}$ | 7. $a^0 = 1$ |
| 4. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ | 8. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ |

➔ $a^p = a^q \rightarrow p=q$

- **Absoluut getal**: getal dat op zichzelf staat (vb. 3 appels)
- **Relatief getal**: getal dat afhankelijk is van een ander, meestal absoluut getal (vb. 1 op 10 mensen hebben maat 40 $\rightarrow$ hoeveel hebben maat 40?)
- **Absolute verandering**: verandering in aantal of hoeveelheid
- **Relatieve verandering**: verandering in procenten of met factor
- **Procent**: een honderdste deel. Een percentage kun je berekenen door:

$$\text{percentage} = \frac{\text{aantal}}{\text{totaal}} \times 100\%$$

Om een relatieve verandering (toename/afname) in procenten te berekenen gebruik je de volgende formule: $\frac{\text{nieuw}-\text{oud}}{\text{oud}} \cdot 100\%$

Voorbeeld:

Als iets eerst €1 kostte en nu €1,50, vul je $\frac{1,50-1}{1} \cdot 100\% = 50\%$. Er is dus sprake van toename van 50% (**groeipercentage**=p).

❖ **Om van procenten normale getallen te maken deel je ze door 100**

Voorbeeld:

Als je een stijging van 12% hebt, moet je het oorspronkelijke getal vermenigvuldigen met 1,12 om het nieuwe getal te krijgen. Dit komt omdat je 0,12 moet optellen bij 1 (**groefactor**=g). bij een stijgingspercentage van 5,8% moet je het getal dus vermenigvuldigen met 1,058 $\rightarrow$ groefactor.

Van procenten naar groefactor: $g = 1 + (p/100)$

Van groefactor naar procenten: $p = (g - 1) \cdot 100\%$

- **Verhouding**: breuk die relatieve grootte van twee getallen uitdrukt. Verhoudingen worden vaak genoteerd met een deelteken (vb. 4:3). De verhouding blijft gelijk als de getallen aan beide kanten van het deelteken met dezelfde waarde vermenigvuldigt of gedeeld worden (vb. 4:3 = 16:12).

Het is handig om een verhoudingstabel te gebruiken voor het rekenen met verhoudingen. Hierbij moet je boven en onder dezelfde bewerkingen uitvoeren.

Voorbeeld:

	$\div 15$	$\cdot 650$	
Prijs in centen	3	0,20	130
Aantal gram olijven	15	1	650
	$\div 15$	$\cdot 650$	

Een niet-geheel getal moet je afronden op een aantal decimalen. Soms geeft de examenopgave aan op hoeveel decimalen je moet afronden en soms moet je zelf een keuze maken. Hier zijn een aantal regels voor;

- Aantallen producten of aantallen eenheden ronden we altijd af op hele aantallen. Het hangt van de vraag af op we naar boven of onder afronden.
- Bij **afronden** op 2 decimalen kijk je naar het 3^e cijfer achter de komma. Als dit gelijk of groter is dan 5 tel je bij de 2^e decimaal 1 op. Als het kleiner is dan 5 blijft de 2^e decimaal gelijk (vb. $3,224 \rightarrow 3,22$ en $3,225 \rightarrow 3,23$).
- Als er wordt gevraagd af te ronden naar bv. duizendtallen kijk je naar de cijfers achter het duizendtal (vb. $176.807.532 \rightarrow 176.808.000$).
- Percentages moet je standaard afronden op 1 decimaal (vb. 29,3%).
Geldbedragen ronden we standaard af op centen $\rightarrow$ 2 decimalen (vb. €12,78)
Grotere bedragen ronden we af op hele, duizenden, miljoenen of miljarden euro's.

B. Algebra en tellen

1. Algebra

Algebra gebruik je om vergelijkingen en uitdrukkingen met één of meer variabelen om te werken tot eenvoudigere uitdrukkingen of tot oplossingen. In het algemeen kun je in de algebra steeds kiezen uit 3 mogelijkheden;

1. Haakjes wegwerken

Voorbeeld:

$$18(2x + 10)$$

$$18 \cdot 2x + 18 \cdot 10 = 36x + 180$$

Je kunt haakjes wegwerken door het getal voor de haakjes te vermenigvuldigen met de termen binnen de haakjes. Als je een formule hebt met één of meerdere onbekenden, zoals $a \cdot (b + c)$, dan is dat gelijk aan $a \cdot b + a \cdot c$.

Bij vermenigvuldigen van twee termen die ieder tussen haakjes staan, moet je elke term tussen de eerste haakjes een keer met elke term tussen de tweede haakjes vermenigvuldigen.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} (8x + 6)(3x - 6) &= 8x \cdot 3x + 8x \cdot -6 + 6 \cdot 3x + 6 \cdot -6 \\ &= 24x^2 - 48x + 18x - 36 \\ &= 24x^2 - 30x - 36 \end{aligned}$$

$$\rightarrow (A + B) \cdot (C + D) = AC + AD + BC + BD$$

2. Gemeenschappelijke factor buiten haakjes halen

Dit is het omgekeerde van haakjes wegwerken $\rightarrow$ je zoekt in een uitdrukking naar de factor waarmee twee termen beiden worden vermenigvuldigd en brengt die buiten de haakjes.

Voorbeeld:

$$4x^3 - 6x^2 = 0$$

$$2x^2 \cdot (2x - 3) = 0$$

$$2x^2 = 0 \text{ OF } (2x - 3) = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AB + AC = A \cdot (B + C)$$

3. Links en rechts van het "=" teken dezelfde bewerking uitvoeren

Dit betreft iedere wiskundige operatie; optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, worteltrekken enz. Door de bewerking op de hele linker- en rechterkant uit te voeren, kun je vergelijkingen eenvoudiger maken of oplossen.

Probeer bij het oplossen van vergelijkingen de volgende vormen te herkennen (hierbij mag je altijd gebruik maken van substitutie):

$$1. A \cdot B = 0 \quad \rightarrow A = 0 \text{ OF } B = 0$$

$$2. A \cdot B = A \cdot C \quad \rightarrow A = 0 \text{ OF } B = C$$

$$3. \frac{A}{B} = C \quad \rightarrow A = B \cdot C \quad , \text{ waarbij } B \neq 0$$

$$4. \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \rightarrow A \cdot D = B \cdot C \quad , \text{ waarbij } B \neq 0 \text{ en } D \neq 0$$

$$5. A \cdot B = A \quad \rightarrow A = 0 \text{ OF } B = 1$$

$$6. \sqrt{A} = B \quad \rightarrow A = B^2$$

Controleer of de gevonden antwoorden voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking (vooral bij gebroken functies of wortelvergelijkingen). Door kwadrateren of andere bewerkingen kan er een 'extra oplossing' zijn.

❖ **Het is altijd toegestaan om een deel van een te herleiden uitdrukking om te schrijven in een andere letter en dit aan het eind van de berekening weer terug te draaien.**

Voorbeeld:

$$2x^2 \cdot (x^2 - 2) = 0$$

$$a \cdot b = 0$$

$$a = 0 \text{ OF } b = 0$$

$$2x^2 = 0 \text{ OF } (x^2 - 2) = 0$$

$$\rightarrow x = 0 \text{ OF } (x^2 - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ OF } x^2 = 2$$

$$x = 0 \text{ OF } x = \pm\sqrt{2}$$

- Eerstegraadsfuncties: lineaire functies met een formule van de vorm $f(x) = ax + b$.

$a + b \rightarrow$ constanten

$a(\neq 0) \rightarrow$ richtingscoëfficiënt (HG)

$b \rightarrow$ snijpunt van grafiek f met de y -as (SG)

$x \rightarrow$ variabele

Het snijpunt van x -as vind je door de formule gelijk te stellen aan 0. De grafiek van een lineaire/eerstegraadsfunctie $f(x) = ax + b$ is een rechte lijn $\rightarrow y = ax + b$.

Je kunt een eerstegraadsvergelijking op meerdere manieren weergeven (vb. $4x + 3y = 12 \rightarrow$ algemene vorm van lineaire vergelijking). De oplossingen van de vergelijking zijn alle getallenparen die aan de vergelijking voldoen $\rightarrow$ alle punten op de lijn. Je kunt dit makkelijk zien door in de vergelijking y vrij te maken;

$$4x + 3y = 12 \quad (-4)$$

$$3y = -4x + 12 \quad (:3)$$

$$y = -1\frac{1}{3}x + 4 \quad \rightarrow y = ax + b$$

Als er wordt gevraagd om het snijpunt van de grafieken van $f(x)$ en $g(x)$ te vinden, gebruik je dat in het snijpunt geldt: $f(x) = g(x)$. Hierbij stel je dus twee gegeven formules aan elkaar gelijk. Als grafieken snijpunten hebben zul je hier één of meerdere waarden voor x vinden. Nadat je deze waarde(n) hebt gevonden, vul je deze in bij één van de gegeven formules (y -coördinaat van snijpunten). De x - en y -coördinaten samen zijn de coördinaten van de snijpunten.

Als er wordt gevraagd op welk interval één van de twee lijnen in een grafiek zich op of boven de ander bevindt, moet je de ongelijkheid $f(x) \geq g(x)$ oplossen. Dit wordt opgelost door eerst het

snijpunt van de twee grafieken te vinden $\rightarrow$ oplossen van $f(x)=g(x)$. Daarna teken je de grafiek en kun je zien waar de snijpunten zijn en op welk interval geldt dat $f(x) \geq g(x)$.

- **Herleiden:** zo eenvoudig mogelijk schrijven van formules en vergelijkingen. Als dit wordt gevraagd, wordt er dus gevraagd om de vergelijking in een zo eenvoudig mogelijke vorm te schrijven. Gelijksortige termen kun je bij elkaar op- en aftrekken. Vermenigvuldigingen en delingen kun je altijd uitwerken, ook als ze niet gelijksoortig zijn.
- **Vergelijkingen:** bestaan uit linker- en rechterlid waar een '=' teken tussen staat. Dit betekent dat ze gelijk zijn aan elkaar. Een vergelijking vereenvoudigen werkt als volgt;
 - o Haakjes wegwerken
 - o Gemeenschappelijke factoren buiten haakjes weghalen
 - o Links en rechts dezelfde bewerking uitvoeren. Zo mag je beide leden delen. Zo mag je beide leden delen en vermenigvuldigen door hetzelfde getal, termen links en rechts optellen en aftrekken etc.
- **Grootheid:** iets wat je getalsmatig kunt meten of uitdrukken (vb. lengte, tijd).
- **Eenheid:** benaming waar je grootheden in meet (vb. meters, kilo)

❖ **Op het examen moet je lengte(+oppervlakte en inhoud), massa en tijd kunnen omrekenen**
 Een lengte-eenheid geeft een bepaalde meting of afstand aan (standaardmaat $\rightarrow$ meter).
 Stapgrootte $\rightarrow$ factor 10. Door te vermenigvuldigen of delen door 10 kun je per stap omrekenen.

Eenheid van lengte	Afkorting	Aantal meter	1 meter is
kilometer	km	1000	0,001 km
hectometer	hm	100	0,01 hm
decameter	dam	10	0,1 dam
meter	m	1	1 m
decimeter	dm	0,1	10 dm
centimeter	cm	0,01	100 cm
millimeter	mm	0,001	1000 mm

De oppervlakte geeft aan hoe groot een bepaald gebied is (standaardmaat $\rightarrow$ vierkante meter = m^2). Een hectare is een gebied van 100 bij 100 meter $\rightarrow 10000 m^2$. Stapgrootte $\rightarrow$ factor 100. Door te vermenigvuldigen of te delen door 100 kun je per stap omrekenen.

Eenheid van oppervlakte	Afkorting	Aantal m^2	1 m^2 is
Vierkante kilometer	km^2	1.000.000	0,000001 km^2
Vierkante hectometer	hm^2	10.000	0,0001 hm^2
Vierkante decameter	dam^2	100	0,01 dam^2
Vierkante meter	m^2	1	1 m^2
Vierkante decimeter	dm^2	0,01	100 dm^2
Vierkante centimeter	cm^2	0,0001	10.000 cm^2
Vierkante millimeter	mm^2	0,000001	1.000.000 mm^2

De eenheid van inhoud is m^3 of liter. De inhoud is een maat voor volume. Omdat we dit vaak uitrekenen als $l \times b \times h$ is de eenheid m^3 (kubieke meter). stapgrootte $\rightarrow 10^3/1000$.

Eenheid van inhoud	Afkorting	Aantal m^3	1 m^3 is
Kubieke kilometer	km^3	1.000.000.000	0,000000001 km^3
Kubieke hectometer	hm^3	1.000.000	0,000001 hm^3
Kubieke decameter	dam^3	1000	0,001 dam^3
Kubieke meter	m^3	1	1 m^3
Kubieke decimeter	dm^3	0,001	1000 dm^3
Kubieke centimeter	cm^3	0,000001	1.000.000 cm^3
Kubieke millimeter	mm^3	0,000000001	1.000.000.000 mm^3

Een andere gangbare maat voor inhoud is liter. Stapgrootte → factor 10. Door te vermenigvuldigen en delen door 10 kun je per stap omrekenen.

$$1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$$

Eenheid van inhoud	Afkorting	Aantal liter	1 liter is
kiloliter	kl	1.000	0,001 kl
hectoliter	hl	100	0,01 hl
decaliter	dal	10	0,1 dal
liter	l	1	1 l
deciliter	dl	0,1	10 dl
centiliter	cl	0,01	100 cl
milliliter	ml	0,001	1000 ml

Massa geeft aan hoeveel iets weegt (Standaardmaat → kilogram=kg). Stapgrootte → factor 1000. Door te vermenigvuldigen of delen door 1000 kun je per stap omrekenen.

Eenheid van massa	Afkorting	Aantal kilogram	1 kilogram is
ton	ton	1000	0,001 ton
kilogram	kg	1	1 kg
gram	g	0,001	1.000 g
milligram	mg	0,000001	1.000.000 mg

Tijd is meetbaar door de klok. De standaard eenheid is de seconde.

$$\text{Minuut} = 60 \text{ seconden}$$

$$\text{Kwartier} = 15 \text{ minuten}$$

$$\text{Uur} = 60 \text{ minuten}$$

$$\text{Dag} = 24 \text{ uur}$$

$$\rightarrow 60 \times 60 = 3600 \text{ seconden}$$

$$\rightarrow 60 \times 24 = 1440 \text{ minuten}$$

$$60 \times 60 \times 24 = 86400 \text{ seconden}$$

$$\text{Week} = 7 \text{ dagen}$$

$$\text{Maand} = 30/31 \text{ dagen}$$

$$\text{Jaar} = 12 \text{ maanden} / 52 \text{ weken} / 365 \text{ dagen}$$

$$\text{Decennium} = 10 \text{ jaar}$$

$$\text{Eeuw} = 100 \text{ jaar}$$

$$\text{Millennium} = 1000 \text{ jaar}$$

$$(\text{februari} \rightarrow 28/29 \text{ dagen})$$

$$(\text{schrikkeljaar} \rightarrow 366 \text{ dagen})$$

C. Verbanden

1. Tabellen

- **Tabel:** bestaat uit rijen(horizontaal) en kolommen(verticaal).

Eerste rij → titels van kolommen

Eerste kolom → rij-titels

Deze geven aan welke informatie in de kolommen en rijen wordt gegeven.

Bij het verwerken van informatie uit tabellen is het belangrijk om eenheden goed bij getallen te houden(vb. aantal inwoners: aantal kamers= ... Inwoners per kamer).

2. Grafieken, vergelijkingen en ongelijkheden

- **Grafiek:** visuele weergave van verband.

Bij grafieken kan er sprake zijn van;

- o Schommeling → geen vast patroon in gegevens
- o Trend → positieve/negatieve lijn in gegevens
- o Periodiciteit → regelmatig terugkomend patroon in gegevens

❖ **Op het examen moet je grafieken interpreteren en zelf tekenen**

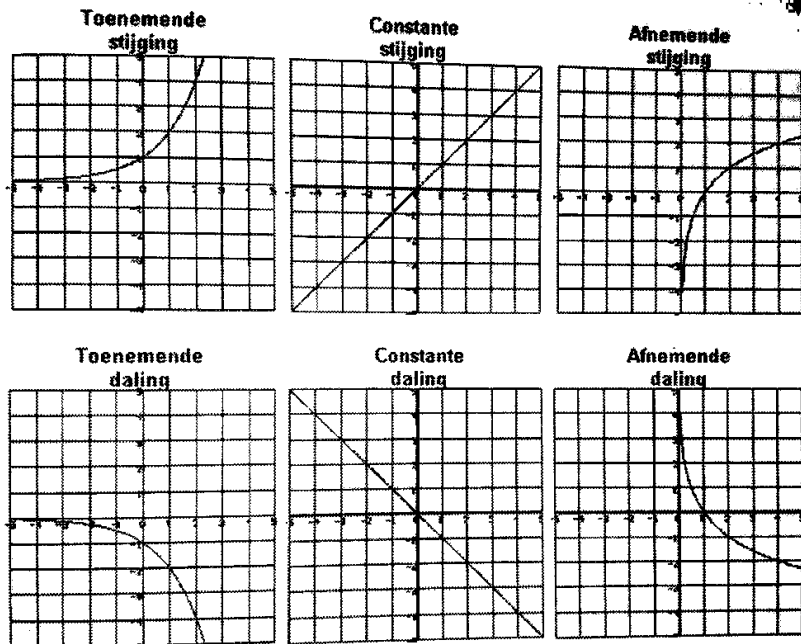
Je moet genoeg informatie langs assen zetten en eenheden duidelijk aangeven.

Je moet aangeven of een grafiek stijgend of dalend is. Dit onderscheiden we in 3 soorten; toenemend, constant en afnemend.

Bij toenemende stijging neemt y steeds meer toe bij iedere toename van x.

Bij afnemende daling neemt y steeds minder af bij iedere toename van x.

Bij een constante daling neemt y steeds meer met dezelfde hoeveelheid af bij iedere toename van x.



Grafiek tekenen:

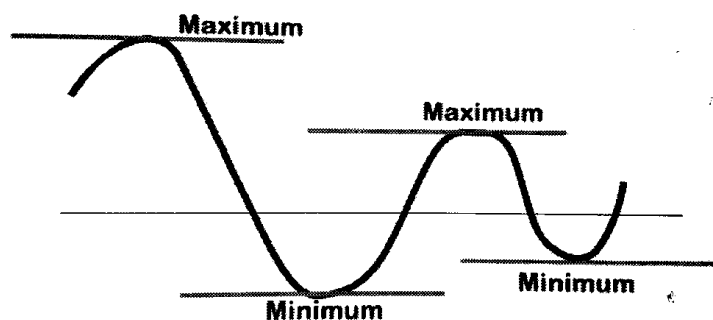
- Tabel maken
- Assen van grafiek tekenen
- Kies goede stapgrootte en teken punten van tabel in grafiek
- Teken vloeiende lijn door punten

❖ **Let op dat alle informatie en eenheden langs assen duidelijk zijn aangegeven + titel boven grafiek.**

Als er wordt gevraagd een grafiek te *schetsen*, gaat het om de vorm van de grafiek en de ligging ten opzichte van het assenstelsel. Benoem wel de x- en y-assen. Schaalverdeling is niet nodig. Als je informatie uit een grafiek moet aflezen, moet je eerst weten waar de grafiek over gaat. Hierbij kijk je naar assen van grafiek(en legenda).

❖ **Let altijd op eenheden!**

Als in een vraag dezelfde soort informatie in meerdere eenheden wordt gegeven, moet je eerst alles omrekenen naar dezelfde eenheid.



- Extreme waarden(toppen): pieken en dalen van een grafiek. Dit is een **minimum/maximum** op een bepaald **interval** van de functie. Een grafiek heeft een extreme waarde in een bepaald punt wanneer de raaklijn aan de grafiek in dat punt horizontaal loopt.

Snijpunt met x-as→ plek waar grafiek x-as snijdt en y-waarde 0 is.

Snijpunt met y-as→ plek waar grafiek y-as snijdt en x-waarde 0 is.

Snijpunt van twee grafieken→ plek waar twee grafieken elkaar snijden/raken en gelijke x- en y-waarden hebben.

Snijpunten in grafiek aflezen:

- Kijk waar lijnen elkaar snijden
- Zoek bijbehorende x-coördinaat
- Zoek bijbehorende y-coördinaat
- Snijpunt $\rightarrow (x, y)$

Het snijpunt van twee rechte lijnen is ook algebraïsch te berekenen. Dit doe je door de formules van de grafieken aan elkaar gelijk te stellen en deze vergelijking op te lossen. Daarna vul je de uitkomst voor x uit in één van de formules voor y.

Voorbeeld:

Lijn 1 $\rightarrow y = -x + 4$

Lijn 2 $\rightarrow y = x - 2$

$$-x + 4 = x - 2$$

$$-2x = -6$$

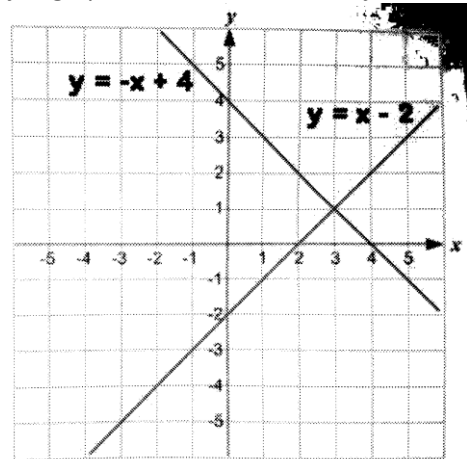
$$x = 3$$

$$y = x - 2$$

$$y = 3 - 2$$

$$y = 1$$

$\rightarrow$ Snijpunt (3,1)



- Ongelijkheid: vergelijking waar twee termen niet gelijk worden gesteld aan elkaar, maar waar één van de termen groter is/gelijk aan de ander. Dit los je op door eerst de vergelijking op te lossen $\rightarrow$ dit kan algebraïsch of grafisch numeriek (mag alleen als in vraag algebraïsch of exact niet genoemd wordt). Als je dit hebt opgelost vind je waar de grafieken elkaar snijden etc.

> Groter dan

< Kleiner dan

$\geq$ Groter of gelijk aan

$\leq$ Kleiner of gelijk aan

Voorbeeld:

Los op $2x > 3x^2$

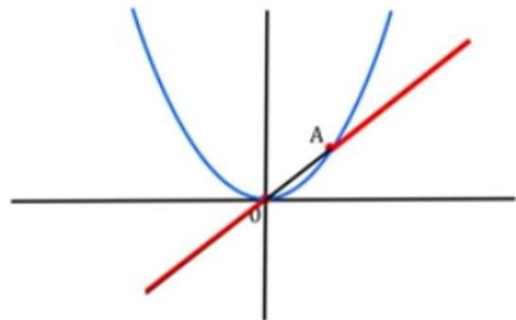
(wanneer ligt de lijn boven de parabool?)

$$2x > 3x^2$$

$$2x = 3x^2$$

$$x = 0 \text{ en } x = \frac{2}{3}$$

$$2x > 3x^2 \text{ geeft } 0 < x < \frac{2}{3}$$



Op het examen moet je de volgende typen standaardverbanden kennen;

- Lineair verband: Formule $\rightarrow y = ax + b$
Grafiek van lineaire verbanden zijn rechte lijnen.
- Exponentieel verband: Formule $\rightarrow y = b \cdot g^x$
Grafiek van exponentiële verbanden stijgen steeds sneller als $g > 1$ of dalen als $g < 1$.
- Recht evenredig verband: Formule $\rightarrow y = ax$
Dit zijn lineaire verbanden door de oorsprong (zonder beginwaarde).
Als x verdubbelt, verdubbelt y ook. Als x halveert, halveert y ook.
Dit verband zie je bv. vaak tussen aantal producten en totale prijs daarvan.
- Omgekeerd evenredig verband: Formule $\rightarrow y = a/x$
Bij omgekeerd evenredige verbanden worden de waarde van y twee keer zo klein als de waarde van x twee keer zo groot worden. Vermenigvuldig je x met een getal, moet je y door dat getal delen. De grafiek hiervan is een hyperbool.

Als er wordt gevraagd een vergelijking op te lossen en er niet wordt gevraagd dit numeriek of exact te doen, mag je dit grafisch-numeriek oplossen met behulp van GR. Om dit te doen, plot je beide grafieken met de GR door bij Y1 en Y2 de twee formules in te voeren. Daarna stel je je venster in door een geschikt waardegebied voor x te kiezen. Voor de bijbehorende geschikte y-waarden gebruik je de *Zoom-Fit* functie. De waarden worden soms ook al gegeven of kunnen afgeleid worden uit de context van de opgave. Als dit niet zo is kun je vaak beginnen met *MinX* van -10 en *MaxX* van +10 en vervolgens de grafiek plotten. Als de grafiek niet goed in beeld is, kun je het *window* een paar stappen aanpassen. Dan plot je de grafieken door voor optie *G-Solve ISCT* te kiezen. Hierdoor krijg je het snijpunt en kun je de oplossing van x en y aflezen.

3. Formules met één of meer variabelen

Er kunnen meerdere variabelen in formules voorkomen.

Voorbeelden:

$$N = 5p + 8q + 16$$

$$q = 4$$

$$N = 5p + (8 \cdot 4) + 16$$

$$N = 5p + 48$$

$$L = \frac{V+M-13}{2} + 10$$

$$V = 174 \text{ en } M = 183$$

$$L = \frac{174+183-13}{2} + 10 = 182$$

Je kunt soms ook twee **formules combineren**.

Voorbeeld:

$$A = 3x + 2y - 6 \text{ en } y = 2x + 8$$

$$A = 3x + 2(2x + 8) - 6$$

$$A = 3x + 4x + 16 - 6$$

$$A = 7x + 10$$

Je kunt ook een variabele vrijmaken. Hier wordt de formule omgeschreven, zodat links alleen de 'vrijgemaakte' variabele staat en rechts de formule met de overige variabelen.

Voorbeeld:

Maak y vrij in formule $5x - 2y = 16$

$$5x - 2y = 16$$

$$-2y = -5x + 16 \quad (-5x)$$

$$y = 2\frac{1}{2}x - 8 \quad (:-2)$$

4. Lineaire verbanden en lineaire groei

Bij een **lineair verband** geldt dat als de waarde van x met één toeneemt, de waarde van y telkens met dezelfde hoeveelheid toe- of afneemt. De grafiek is een rechte lijn. De algemene formule is $y = a \cdot x + b$.

$a \rightarrow$ HG/richtingscoëfficiënt(rc)

Rc=a betekent 1 naar rechts en a omhoog in grafiek.

$b \rightarrow$ SG $\rightarrow$ hoe hoog grafiek begint op y-as bij $x=0$

Als de formule van een rechte lijn in een grafiek niet is gegeven, dan kun je zelf een formule opstellen. We zoeken dan getallen a en b in formule $y = a \cdot x + b$.

Voorbeeld:

Stel formule van lijn K op die door punt A(20, 12) gaat met rc= -0,5.

$$y = -0,5x + b$$

$$x = 20 \text{ en } y = 12$$

$$12 = -0,5 \cdot 20 + b$$

$$12 = -10 + b$$

$$12 + 10 = b$$

$$b = 24$$

$$\rightarrow y = -0,5x + 24$$

Als de richtingscoëfficiënt niet is gegeven, maar wel de coördinaten van twee punten op de grafiek, kun je dit zelf berekenen met de differentiequotiënt:

$$Rc = \frac{\text{verschil van y-coördinaten}(\Delta y)}{\text{bijbehorend verschil van x-coördinaten}(\Delta x)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Voorbeeld:

Stel formule op van lijn M door punten P(8, -2) en Q(3, 9).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 - (-2)}{3 - 8} = \frac{11}{-5} = -2,2 \rightarrow a$$

$$-2 = -2,2 \cdot 8 + b$$

$$2 = -17,6 + b$$

$$-2 + 17,6 = b$$

$$15,6 = b$$

$$\rightarrow y = -2,2x + 15,6$$

Bij **lineaire groei** neemt het resultaat steeds met dezelfde hoeveelheid per tijdseenheid toe/af.

De grafiek is dus weer een rechte lijn. De bijbehorende formule is $N = at + b$.

b $\rightarrow$ beginhoeveelheid

a $\rightarrow$ toename van N per tijdseenheid T

Als een formule is gegeven, kun je een grafiek plotten. Dit doe je door de formule van de lijn op je GR in te voeren bij Y=, onder *window* geschikte waarden te kiezen voor $Xmin$, $Xmax$, $Ymin$ en $Ymax$, en vervolgens door de *graph* optie de grafiek te maken. De geschikte waarden zijn vaak uit de context van de vraag te halen. Als dit niet zo is kun je $Xmin = -10$ en $Xmax = 10$ en voor de y-richting *Zoom-Fit* te gebruiken.

Zo kan je bv. ook het snijpunt van twee functies vinden. Door naar het menu *GRAPH* te gaan, kan je beide formules bij Y1 en Y2 in te voeren. Daarna druk je op *draw* en plot je de grafieken. Dan druk je op *ISCT* en komt in beeld te staan bij welke x de grafieken gelijk zijn en welke waarde(y) daarbij hoort.

❖ **Noteer altijd welke opties je gebruikt en formules je invoert bij GR. Schrijf ook altijd op welke *window*($XMIN$, $XMAX$, $YMIN$, $YMAX$) je gebruikt. Antwoord daarna pas op de vraag. IVO(Invoer, Venster en Optie)**

Vergelijkingen kun je grafisch-numeriek oplossen door de vergelijking eerst in twee stukken te delen en deze in GR in te voeren(Y1 en Y2). Met *ISCT* bereken je de coördinaten van het snijpunt. Vergelijkingen kan je ook algebraïsch oplossen.

- **Interpoleren:** berekenen van waarde die tussen twee gegeven waarden ligt. Je gaat hierbij uit van een lineair verband tussen twee gegeven punten.

Voorbeeld:

t	0	3	6	9
N	10	25	35	44

Bereken N voor t= 4.

Gevraagde waarde(4) tussen 3 en 6, dus punten (3, 25) en (6, 35) gebruiken.

Verschil tussen 6 en 3= 3

Verschil tussen 35 en 25= 10

Verschil tussen 3 en 4= 1

$\rightarrow$ kruistabel

Δt	3	1
ΔN	10	ΔN

$$\frac{10 \cdot 1}{3} = 3,33$$

N die hoort bij t= 4 is dus $25 + 1 \cdot 3,33 = 28,33$.

- **Extrapoleren:** berekenen van waarde die buiten gegevens ligt.

t	0	3	6	9
N	10	25	35	44

Bereken N voor t= 11.

Bij extrapoleren gebruik je altijd de laatste twee punten, dus (6, 35) en (9, 44).

Verschil tussen 6 en 9= 3

Verschil tussen 9 en 11= 2

Verschil tussen 35 en 44= 9

→ kruistabel

Δt	3	2
ΔN	9	ΔN

$$\frac{9 \cdot 2}{3} = 6$$

N die hoort bij $t = 11$ is dus $44 + 6 = 50$.

5. Exponentiële verbanden

Bij een **exponentieel verband** geldt steeds dat als x één keer groter wordt, waarde van y telkens met hetzelfde getal (dezelfde factor) vermenigvuldigd worden.

De grafiek van een exponentieel verband is altijd een kromme lijn. Hierbij hoort een exponentiële formule van de vorm: $y = a \cdot b^x$. De grafiek is toenemend stijgend als $b > 1$ en afnemend dalend als $0 < b < 1$.

Bij **exponentiële groei** wordt de hoeveelheid telkens met hetzelfde getal vermenigvuldigd → groeifactor. Hierbij hoort formule $N = b \cdot g^t$.

b → beginwaarde ($t = 0$)

g → groeifactor per tijdseenheid (altijd positief)

❖ **Bij afname spreekt men ook van exponentiële groei**

Je kan exponentiële groei in een tabel herkennen door een waarde steeds te delen door de vorige waarde. De stapgrootte ($\Delta t / \Delta x$) moet wel overal even groot zijn. Als groeifactoren weinig van elkaar verschillen (tot op 2 decimalen hetzelfde) is er sprake van exponentiële groei.

Je kunt de groeifactor omzetten naar een andere tijdseenheid. Hiervoor zijn regels:

- Als de tijdseenheid n keer zo groot wordt: $g_{nieuw} = g^n$
- Als de tijdseenheid n keer zo klein wordt: $g_{nieuw} = g^{\frac{1}{n}}$

Voorbeeld:

Groeifactor per uur → 1,8

Groeifactor per dag → $1,8^{24}$

Groeifactor per half uur → $1,8^{\frac{1}{2}}$

Groeifactor per kwartier → $1,8^{\frac{1}{4}}$

Als je een groeipercentage wil omzetten naar een andere eenheid, moet je eerst het percentage omrekenen naar de groeifactor. Daarna kan je de regels toepassen.

- **Verdubbelingstijd:** (bij exponentiële groei met groeifactor $g > 1$) tijd die verstrijkt voordat de hoeveelheid is verdubbeld. Dit is onafhankelijk van de beginhoeveelheid en is te berekenen door vergelijking $g^t = 2$.
- **Halveringstijd:** (bij exponentiële groei met groeifactor $0 < g < 1$) tijd die verstrijkt tot hoeveelheid is gehalveerd. Dit is onafhankelijk van beginhoeveelheid en is te berekenen door vergelijking $g^t = 0,5$.

Van verdubbelingstijd naar groeipercentage

Voorbeeld:

Wat is het jaarlijkse groeipercentage bij verdubbeling van 8 jaar?

$$g_{8 \text{ jaar}} = 2$$

$$g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{8}} = 1,091$$

Bij een groeifactor van 1,091 hoort een groeipercentage van 9,1% per jaar. Dus bij een verdubbelingstijd van 8 jaar hoort een groeipercentage van 9,1% per jaar.

Ook bij exponentiële groei kan je met 2 gegeven punten de bijbehorende formule afleiden.

Voorbeeld:

Op 1 januari 1950 was het aantal auto's gelijk aan 50. Jaarlijks neemt dit toe met 10%. Stel de formule op.

$$b = 50$$

$$g = 1,1$$

$$N = 50 \cdot 1,1^t$$

Voorbeeld:

Je hebt een bedrag van €1200 op je spaarrekening en je krijgt elk jaar 3,5% rente over dit bedrag. Stel de formule op.

$$N = b \cdot g^t$$

$$b = 1200$$

$$g = 1 + \frac{3,5}{100} = 1,035$$

$$\text{Formule} \rightarrow N = 1200 \cdot 1,035^t$$

Voorbeeld:

De nieuwprijs van een auto is €35000. Elk jaar wordt deze auto 10% minder waard. Stel de formule op van de waarde van de auto.

$$b = 35000$$

$$g = 0,9 \text{ (want waarde daalt jaarlijks 10\%)}$$

$$W = 3500 \cdot 0,9^t$$

Als je de waarde van de auto weet en je die nieuwprijs wil berekenen, gebruik je dezelfde formule $\rightarrow \text{nieuwprijs} = \text{waarde auto} / 0,90^t$.

Voorbeeld:

Punten N= 80 bij t= 5 en N= 220 bij t= 12.

$$N = b \cdot g^t \text{ door punten (5, 80) en (12, 220).}$$

Verschil 12 en 5= 7 uur $\rightarrow g \text{ in 7 uur is } g_{7 \text{ uur}} = 220/80$ (want N neemt in die tijd toe van 80 naar 220)

$$80 \cdot g^7 = 220$$

$$g \text{ is gelijk aan } (220/80)^{\frac{1}{7}} = 1,155$$

$$N = b \cdot 1,155^t$$

$$t = 5 \text{ en } N = 80$$

$$80 = b \cdot 1,155^5$$

$$b = \frac{80}{1,155^5} = 39$$

$$N = 39 \cdot 1,155^t$$

Sommige vergelijkingen kan je ook algebraïsch oplossen, maar sommige ook niet en kunnen alleen met GR.

Voorbeeld:

$$18 \cdot 1,5^t = 57$$

Ga naar menu *GRAPH* en vul in:

$$Y_1 = 18 \cdot 1,5^x$$

$$Y_2 = 57$$

Plot grafieken door optie *ISCT* $\rightarrow t = 8,21$

Grafieken gebruiken

Voorbeeld:

$$N1 = 28t + 78 \quad \rightarrow \text{lineair}$$

$$N2 = 90 \cdot 1,18^t \quad \rightarrow \text{exponentieel}$$

Voor welke waarde van t is N1 groter dan N2?

Ga naar menu *GRAPH* op GR. Vul formule N1 bij Y1 en N2 bij Y2. Plot daarna grafieken en gebruik twee keer optie *ISCT* om beide snijpunten te berekenen $\rightarrow x = 1,02$ en $x = 6,23$. Je ziet dat N1 tussen twee snijpunten boven N2 ligt. N1 is groter dan N2 als t tussen 1,02 en 6,23 ligt.

Bij exponentiële verbanden zijn aantallen vaak heel breed (vb. van enkele eenheden naar tienduizenden). Er wordt dan gebruik gemaakt van een **logaritmische schaalverdeling** om de grafiek goed te weergeven.

Op gewoon grafiekpapier geeft de afstand tussen schaalstrepen altijd dezelfde toename van hoeveelheid weer, maar bij logaritmisch papier geeft de afstand tussen schaalstrepen dezelfde

factor weer. Je kunt het makkelijk herkennen, omdat de 0 ontbreekt en de verticale schaal met gelijke afstanden loopt van 1 naar 10 naar 100 naar 1000.

❖ **Exponentiële verbanden zien er op logaritmische schaalverdeling altijd uit als een rechte lijn**

D. Statistiek

1. Presentaties van data interpreteren en beoordelen

- **Statistiek:** wetenschap die zich bezighoudt met verzamelen, vergelijken en interpreteren van kwantitatieve gegevens. Je moet gegevens uit statistisch onderzoek kunnen interpreteren. Bij bv. een onderzoek over gebruik van diverse vervoersmiddelen onder middelbare scholieren in NL. het is bijna onmogelijk alle scholieren bij dit onderzoek te betrekken en daarom wordt er meestal maar een selectie gebruikt om het onderzoek mee uit te voeren (steekproef).
- **Steekproef:** onderzoek onder kleine groep met bedoeling dat resultaten gelden voor soortgelijke groep.
- **Populatie:** gehele te onderzoeken groep. Dit kan een groep mensen zijn, maar dat hoeft niet per se.

Er wordt gebruik gemaakt van steekproeven, omdat een onderzoek onder de gehele populatie te veel geld/tijd kost. Een steekproef is een selectie uit een totale populatie om iets over de gehele populatie te kunnen zeggen.

- **Respondent:** iemand die medewerking verleent aan een onderzoek

Er zijn verschillende manieren om een steekproef uit een populatie te trekken. Dit kan bv. met toevalsgetallen. Hiervoor kan je de 'random' toets op je rekenmachine gebruiken. Deze geeft willekeurige getallen tussen 0 en 1 weer, waarmee je (na bewerken tot hele getallen) elementen in een populatie kunt aanwijzen.

Een goede steekproef moet voldoen aan de volgende voorwaarden:

- **Aselect:** een steekproef is aselekt wanneer uit een populatie willekeurig een aantal individuen wordt gekozen, zodat ieder lid van de populatie een even grote kans heeft om in de steekproef te komen. Willekeurig loten is een vorm van aselekt kiezen. Het tegenovergestelde een **aselecte steekproef** is een selecte steekproef. Hierbij beoordeelt de onderzoeker of een persoon/object in de steekproef komt en is de selectie niet willekeurig.
- **Representatief:** een steekproef moet een goede afspiegeling zijn van de hele populatie. Een steekproef is **representatief** voor de hele populatie als alle deelverzamelingen van de populatie evenredig zijn vertegenwoordigd.
- **Voldoende groot:** hoe groter de steekproef, hoe meer zekerheid over onderzoeksresultaten (betrouwbare afspiegeling van gehele populatie). Extreme waarden zijn dan minder van invloed op het gemiddelde als de omvang groter is. De benodigde steekproefomvang is o.a. afhankelijk van de gewenste statistische betrouwbaarheid van uitspraken. Als de omvang niet groot genoeg is, kan je geen betrouwbare conclusies trekken.
- **Centrummaat:** getal dat het midden (centrum) van een reeks gegevens aangeeft. Je moet er drie kennen:
 - **Gemiddelde:** getal dat je krijgt als je som van alle waarnemingen deelt door het totale aantal waarnemingen.
 - **Mediaan:** middelste waarde in reeks waarnemingen die zijn gerangschikt naar grootte. 50% van de getallen zijn dus groter dan/gelijk aan de mediaan en 50% kleiner dan/gelijk aan. Bij een oneven aantal neem je de middelste en bij een *even* aantal neem je het gemiddelde van de middelste twee (vb. 32 waarnemingen → gem. van 16^e en 17^e getal).

- **Modus:** meest voorkomende waarde in reeks waarnemingen(hoogste frequentie). Als er meerdere getallen het vaakst voorkomen, is er geen modus. Bij verdeling in klassen, heet de klasse met de hoogste frequentie de modale klasse.
- **Spreidingsmaten:** drukken mate van spreiding van uitkomsten uit in kengetal. Ze laten zien in welke mate een reeks waarnemingen onderling verschillen en afwijken van centrum. Hoe hoger de spreidingsmaat, hoe verder de waarnemingsuitkomsten uit elkaar liggen.

Je moet de volgende spreidingsmaten kennen:

- **Spreidingsbreedte:** verschil tussen grootste en kleinste waarnemingsgetal
- **Kwartielafstand:** verschil tussen derde en eerste kwartiel
- **Standaardafwijking:** statistische maat van spreiding van variabele rond gemiddelde. De standaardafwijking mag losjes worden opgevat als de gemiddelde afstand van waarnemingen tot hun gemiddelde.

Variabelen zijn kwantitatief of kwalitatief.

- **Kwantitatieve variabelen:** verkregen uit tel- of meetprocessen. Ze zijn te meten en te kwantificeren(= in cijfers uit te drukken)→vb. lengte, inkomen etc.

Ze zijn onder te verdelen in;

- **Discrete variabelen:** waarden die alleen uit gehele getallen kunnen bestaan. Ze hebben een waarde dat de uitkomst is van een telling of classificatie(vb. aantal ogen wat je met een dobbelsteen kunt gooien).
- **Continue variabelen:** variabelen die elke denkbare waarde kunnen aannemen, soms binnen bepaald interval. Tussen elk tweetal mogelijke waarden zijn er altijd andere mogelijke waarden die een continue variabele kan aannemen(vb. lengte en gewicht).
- **Kwalitatieve variabelen:** niet uit te drukken in een getal. Uitkomsten hiervan verwijzen naar wederzijds uitsluitende groepen van elementen→vb. geslacht, kleur ogen etc.

Ze kunnen worden gemeten op de volgende meetniveaus. Meetniveaus zijn belangrijk in statistiek, omdat ze bepalen wat we wel/niet met een variabele kunnen doen. Het is niet mogelijk een gemiddelde van deze variabelen te berekenen.

- **Nominaal:** waarde van variabele heeft enkel betekenis van naam. Er is geen sprake van rangorde of volgorde in gegevens(vb. kleur, bloedgroep). Variabelen uitgedrukt in getallen kunnen ook nominaal zijn(vb. telefoonnummers).
- **Ordinaal:** bij deze variabelen is sprake van volgorde of rangorde. Ze kunnen worden geordend/geclassificeerd(vb. antwoordcategorieën van enquêtes). Bij ordinale variabelen is volgorde duidelijk, maar zijn verschillen niet kwantitatief aan te duiden. Er is geen sprake van schaal.

Kwantitatieve variabelen kennen we ook in twee meetniveaus:

- **Interval:** hierbij wordt variabele in getal uitgedrukt, maar ontbreekt een objectief nulpunt. Hierdoor kan je nooit zeggen dat de ene waarde 2x kleiner/groter dan de ander is(vb. kledingmaten, temperatuur in °C).
- **Ratio:** dit betreft alle kwantitatieve variabelen met duidelijk nulpunt(vb. lengte, gewicht, oppervlakte etc.). hierbij is 2x zoveel of 25% minder altijd duidelijk gedefinieerd.

Gegevens	Kwalitatief		Kwantitatief	
Meetniveau	nominaal	ordinaal	interval	ratio
Voorbeeld	kleur	S,M,L,XL	temperatuur °C	lengte, gewicht
Categorisering	Ja	Ja	Ja	Ja
Volgorde		Ja	Ja	Ja
Gelijke verschillen			Ja	Ja
Natuurlijk nulpunt				Ja

2. Data verwerken

- **Frequentietabel:** tabel waarin alle waarnemingen staan, zodat je kunt aflezen hoe vaak een bepaalde waarneming voorkomt.
- Absolute frequentie: hoe vaak iets daadwerkelijk voorkomt
- Relatieve frequentie: percentage van totale aantal
Totale frequentie(populatie) → altijd 100%.
- Cumulatieve frequentie: geeft aan hoe vaak een bepaalde uitkomst+ alle uitkomsten met kleinere waarde zijn waargenomen(cumulatief= opgeteld).

Om relatieve frequentie te berekenen, gebruik je de formule;

$$\text{relatieve frequentie} = (\text{absolute frequentie} / \text{totale frequentie}) \cdot 100\%$$

- **Uitschieter(uitbijter):** waarde die ver verwijderd is van andere gevonden waarden (vb. iemand in klas is 2,15m → uitschieter. Diegene heeft lengte dat een aantal standaarddeviaties afwijkt van gemiddelde).
Heeft invloed op gemiddelde, maar niet op mediaan en modus → gemiddelde gaat omhoog/omlaag, maar mediaan blijft hetzelfde.

Voor sommige gegevens is het niet zinvol om voor elke mogelijke waarde de frequentie te bepalen en worden de gegevens onderverdeeld in klassen → groeperen van correspondenten.

- **Klassebreedte:** grootte van iedere klasse
- **Klassegrenzen:** worden gevormd door hoogste en laagste waarden van een klasse. Deze mogen niet overlappen, omdat het dan niet duidelijk is in welke categorie een grensgeval zit.

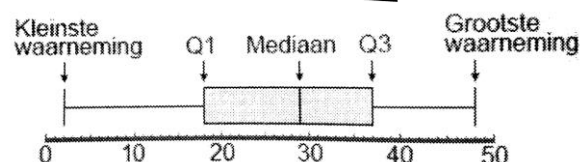
Bij het indelen van klassen verlies je informatie.

→ Hoe minder klassen worden onderscheiden, hoe meer informatie verloren gaat.

→ Hoe groter de klassebreedte, hoe meer informatie er verloren gaat.

- Kruistabel: hierin worden twee frequentietabellen tegen elkaar uitgezet. Dit geeft overzicht van twee variabelen waarin je kunt aflezen hoe vaak elke combinatie van categorieën voorkomt. Ze worden gebruikt voor variabelen met een beperkt aantal categorieën, omdat ze anders te onoverzichtelijk worden.
- Staafdiagram: grafische weergave van gegevens door met staafjes te werken. Dit wordt gebruikt bij discrete variabelen.
- Histogram: vorm van staafdiagram die hoort bij een frequentieverdeling van gegevens die in klassen zijn ingedeeld. Dit wordt gebruikt bij continue variabelen.
- Dotplot: grafische weergave van gegevens door met (gekleurde) bolletjes te werken. Het lijkt op een staafdiagram, maar gebruikt bolletjes i.p.v. staafjes. Ze zijn geschikt om te gebruiken bij kleine datasets. Een voordeel is dat uitschieters duidelijk te zien zijn. Bij grotere datasets kan je beter een staafdiagram/histogram gebruiken.
- Lijndiagram: grafische weergave van gegevens d.m.v. een lijn. Hierin zijn punten in een lijn met elkaar verbonden. Ze worden gebruikt om te laten zien hoe iets zich ontwikkelt in de tijd. Trends zijn hierbij goed te weergeven. Op de horizontale as wordt vaak de tijd weergegeven, maar soms worden andere grootheden gebruikt.
- Cirkeldiagram: grafische weergave van gegevens in de vorm van een cirkel. Hieruit zijn gegevens in procenten af te lezen. De grootte van een deel in de diagram geeft aan hoe hoog het percentage is. Een cirkel wordt onderverdeeld in 360°.
- Steel- en bladdiagram: grafische weergave van gegevens. Als je deze 90° draait krijg je een soort histogram. Het voordeel is dat brongegevens hierin te vinden zijn, waar dat bij een histogram niet zichtbaar is.
- Boxplot: grafische weergave van verzameling gegevens. Dit geeft informatie over mediaan, eerste en derde kwartiel en kleinste en grootste waarneming. Hierdoor is dit een weergave van spreiding van verdeling. Voor het maken van een boxplot wordt de dataset verdeeld in vier gelijke *kwartielen* (25% van data). Uit de breedte

3	3
4	3 9
5	1 5 6
6	1 3 5 6 8 9 9
7	0 2 2 5 5 8
8	1 3
9	2 6



van de kwartielen is op te maken hoe de data is verdeeld. De mediaan(Q2) is de middelste waarde in reeks waarnemingen gerangschikt naar grootte. 50% van de waarnemingen ligt daaronder en 50% daarboven. Bij een even aantal waarnemingen neem je het gemiddelde van de middelste twee. Het eerste kwartiel(Q1) is de mediaan van de eerste helft. Dit bereken je op dezelfde manier als de mediaan, maar dan neem je het middelste getal van de eerste helft. De derde kwartiel(Q3) is de mediaan van de tweede helft. Deze bereken je door het middelste getal van de tweede helft. De kwartielaafstand is het verschil tussen eerste en derde kwartiel. De kleinste waarneming(Q0) is het kleinste getal in de dataset en de grootste waarneming(Q4) het grootste getal.

Boxplot tekenen:

1. Bepaal kleinste en grootste waarneming in gegevens(Q0 en Q4)
2. Rangschik getallen naar grootte
3. Bepaal mediaan → middelste getal/gemiddelde van middelste twee getallen(Q2)
4. Bepaal eerste en derde kwartiel door middelste getal te nemen van eerste 50% en tweede 50%(Q1 en Q3)

→ berekenen met GR via optie '1-Var stats' op Stat-Calcul menu

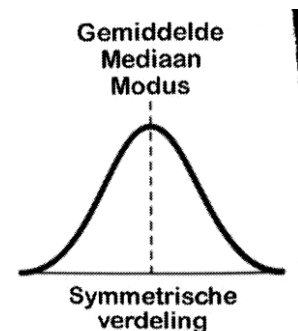
- Spreidingsdiagram: grafische weergave van samenhang tussen twee grootheden. Waarden van ene grootheid worden weergegeven op x-as en waarden van andere grootheid op y-as (vb. spreidingsdiagram van aantal minuten dat groep leerlingen leert en uiteindelijke cijfer).

Het geheel van punten hierin vormen samen een puntenwolk. Elk punt hierin is een waarneming. Er kan soms een rechte lijn door de puntenwolk worden getrokken (trendlijn). Een spreidingsdiagram geeft snelle eerste indruk van een verzameling gegevens. Vervolgens kan er met een statistisch onderzoek worden gekeken of de eerste vermoedens kloppen.

- Frequentiepolygoon: grafische weergave van frequentieverdeling. Boven elk waarnemingsgetal is frequentie uitgezet en de zo verkregen punten zijn met een lijn verbonden. Het begin- en eindpunt liggen altijd op de horizontale as. We spreken van een cumulatieve frequentiepolygoon als een frequentiepolygoon van de cumulatieve frequentie wordt gemaakt.

3. Data en verdelingen

- **Normale verdeling**: continue frequentieverdeling die veel voorkomt. Hierbij ligt gemiddelde recht onder top van de grafiek. Het gemiddelde wordt aangegeven met μ of letter m op GR. Het steekproefgemiddelde wordt aangegeven met $\bar{X}$ en komt overeen met gemiddelde bij normale verdeling. Dit heeft een klokvorm en is symmetrisch ten opzichte van gemiddelde. Het gemiddelde valt in normale verdeling samen met mediaan en modus. Hoe breed het figuur is, hangt af van standaardafwijking(σ).



Bij een normale verdeling liggen de meeste waarnemingen symmetrisch rond het gemiddelde. Hoe verder je van het gemiddelde afwijkt, hoe minder waarnemingen er zullen zijn.

Een normale verdeling heeft een standaard procentuele verdeling vanaf het gemiddelde.

Bij normale verdeling gelde de volgende vuistregels:

- Tussen $\mu - \sigma$ en $\mu + \sigma$ ligt ong. 68% van de waarnemingen
- Tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$ ligt ong. 95% van de waarnemingen
- Tussen $\mu - 3\sigma$ en $\mu + 3\sigma$ ligt bijna 100% van de waarnemingen

In de afbeelding zie je dat $2,5 + 13,5 + 34 + 34 + 13,5 + 2,5 = 100\%$. In een normale verdeling ligt 68% van de waarnemingsgetallen altijd minder dan σ van het gemiddelde μ af en ligt 95% minder dan 2σ van het gemiddelde μ af.

❖ **Je moet deze standaard procentuele spreiding van normale verdeling kennen**

Standaardafwijking berekenen

Voorbeeld:

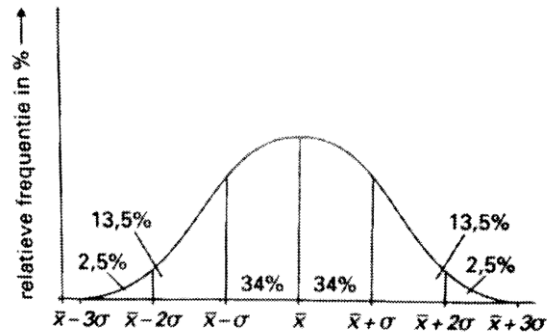
$$\text{Gemiddelde } \bar{X} = \frac{1+2+4+7+8+8}{6} = 5$$

x	$x - \bar{X}$	$(x - \bar{X})^2$
1	-4	16
2	-3	9
4	-1	1
7	2	4
8	3	9
8	3	9

x = cijfer

$\bar{X}$ = gemiddelde

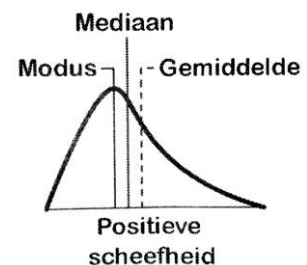
$$\text{standaardafwijking} = \sqrt{\frac{16+9+1+4+9+9}{6}} = \sqrt{\frac{48}{6}} = \sqrt{8} \approx 2,8$$



Je kunt vaststellen of een grootte voldoet aan de normaalverdeling door de verzameling metingen om te zetten in een relatieve cumulatieve frequentieverdeling en de verzameling punten als grafiek te tekenen op 'normaal waarschijnlijkheidspapier'. Dit is speciaal grafiekpapier, waarop verticale schaalverdeling zo is aangepast dat een relatieve cumulatieve frequentieverdeling (als de grootte ong. normaal verdeeld is) een rechte lijn vormt.

Veel grootheden zijn bij benadering normaal verdeeld. Ze kunnen ook andere verdelingen hebben. Wanneer grotere waarden verder zijn verdeeld van het gemiddelde dan kleinere waarden, is er sprake van **scheve verdeling**. Scheefheid in statistiek betekent dat de mate waarin de vorm van verdeling niet symmetrisch is. We onderscheiden een positieve en negatieve scheve verdeling.

- Positieve scheve verdeling: verdeling scheef naar rechts (staart ligt rechts). Het gemiddelde en mediaan liggen hierbij rechts van de top. Het gemiddelde is hier groter dan de mediaan. De staart naar rechts zorgt voor een relatief grote standaardafwijking.
- Negatieve scheve verdeling: verdeling scheef naar links (staart ligt links). Het gemiddelde en mediaan liggen hierbij links van de top. Het gemiddelde is hier kleiner dan de mediaan. De staart naar rechts zorgt voor een relatief grote standaardafwijking.



Normale verdeling heeft één top. Het kan ook zo zijn dat een verdeling meerdere toppen heeft (meertoppige verdelingen). Het gemiddelde en mediaan zeggen weinig over meertoppige verdelingen. De standaardafwijking hierbij is vaak relatief groot.

Een meertoppige verdeling wijst er vaak op dat de steekproef uit twee verschillende populaties is getrokken met elk hun eigen top (vb. verdeling van lengte bij mannen en vrouwen → beide vormen normale verdeling = meertoppige verdeling).

Verder moet je de uniforme verdeling kennen. Hier zijn er twee van:

- **Uniforme discrete kansverdeling**: verdeling van eindig aantal uitkomsten, waarbij mogelijke uitkomsten allemaal even waarschijnlijk zijn. Er zijn n mogelijke uitkomsten. Kans op bepaalde uitkomst is $p=1/n$. verdeling tussen waarden maakt telkens sprongen ter grootte van $1/n$ (vb. dobbelsteenworp → $1/6$ kansen).
- **Uniforme continue kansverdeling**: verdeling van kans op interval. Een continue variabele kan elke denkbare waarde aannemen binnen een bepaald interval. Tussen elk tweetal mogelijke waarden zijn er altijd andere mogelijke waarden die een continue variabele aan kan nemen.

4. Statistische uitspraken doen

Statistiek wordt gebruikt om het verband tussen twee variabelen te beschrijven. Wanneer er een verband is tussen twee variabelen, kan er sprake zijn van statistische samenhang/oorzakelijk verband.

Het verschil zit als volgt:

- Oorzakelijk verband: geeft verband aan tussen oorzaak en gevolg. De ene variabele is (gedeeltelijk) de oorzaak van de andere(vb. opleidingsniveau en inkomen).
- Statistische samenhang(correlatie): samenhang tussen reeks van waarden. Correlatie kan positief of negatief zijn. Positieve correlatie houdt in dat hogere uitkomsten op de ene variabele gepaard gaan met hogere waarden op de andere(vb. temperatuur en aantal verkochte ijsjes). Negatieve correlatie houdt in dat hogere waarden van de ene variabele gepaard gaan met lagere waarden van de andere(vb. hoe vaak iemand fruit eet en hoe vaak iemand ziek is).

Statistische samenhang geeft niet per se een *oorzakelijk* verband aan. We kunnen hier alleen mee vaststellen dat er een verband is, maar niet dat de ene variabele invloed heeft op de ander.

Om het verband tussen twee variabelen te karakteriseren kijken we naar:

- Aanwezigheid van een verband
- Richting van verband → positieve/negatieve correlatie
- Sterkte van verband

Als er correlatie tussen twee verbanden is, kan het ook voorkomen dat er andere variabelen zijn die correlatie verklaren.

Er kunnen overige variabelen van invloed zijn bij onderzoek van statistische samenhang tussen twee variabelen. TREK NIET ZOMAAR CONCLUSIES

De steekproef moet groot genoeg zijn om statistisch onderbouwde uitspraken te doen. Hoe groter de steekproef, hoe betrouwbaarder de correlatie.

Je moet het verschil tussen twee groepen gegevens te kwantificeren. Hoe je dat doet hangt af van het meetniveau van de variabele die je bekijkt. Daarna bekijken we verschillen met nominale, ordinale, rationale of interval meetniveaus.

Het verschil tussen twee groepen op een nominale variabele is te berekenen met de phi-coëfficiënt. Dit gaat als volgt.

In een 2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$, gelden de volgende regels:

- Als $phi < -0,4$ of $phi > 0,4$, dan zeggen we "het verschil is groot";
- Als $-0,4 \leq phi < -0,2$ of $0,2 < phi \leq 0,4$, dan zeggen we "het verschil is middelmatig";
- Als $-0,2 \leq phi \leq 0,2$, dan zeggen we "het verschil is gering".

❖ Dit staat op het formuleblad!

Het verschil tussen twee groepen op een ordinale variabele is te berekenen met het maximale cumulatieve percentage. Dit gaat als volgt. Bereken voor de variabele het cumulatieve percentage en daarna bij elke categorie het verschil van de cumulatieve percentages. Kijk wat het grootste verschil is. Dit maximale verschil in cumulatief percentage($\max V_{cp}$) →

steekproefomvang $n > 100$ is als volgt te interpreteren:

- Als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we "het verschil is groot",
- Als $20 < \max V_{cp} \leq 40$, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- Als $\max V_{cp} \leq 20$, dan zeggen we "het verschil is gering".

❖ Dit staat op het formuleblad!

Het verschil tussen twee groepen op een kwantitatieve variabele is te berekenen met de effectgrootte. Dit gaat als volgt.

Bereken voor beide groepen het gemiddelde en de standaardafwijking. Dit zijn $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, S_1 en S_2 . Zorg ervoor dat $\bar{X}_1 \geq \bar{X}_2$, zodat de effectgrootte positief wordt. De effectgrootte $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{0,5(S_1 + S_2)}$.

Dan geldt:

- Als $E > 0,8$, dan zeggen we "het verschil is groot",
- Als $0,4 < E \leq 0,8$, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- Als $E \leq 0,4$, dan zeggen we "het verschil is gering".

❖ **Dit staat op het formuleblad!**

Een andere manier om het verschil tussen twee groepen op een kwantitatieve variabele te berekenen is door boxplots te vergelijken. Dit gaat als volgt.

Teken de twee boxplots (zie hoofdstuk D2).

- Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we "het verschil is groot".
- Als de boxen elkaar wel overlappen en ten minste één mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- In alle andere gevallen zeggen we "het verschil is gering".

❖ **Dit staat op het formuleblad!**

De box is in dit geval het interval vanaf het eerste kwartiel t/m het derde kwartiel.

- **Populatieproportie:** aantal elementen met bepaald kenmerk in populatie *ten opzichte van* totaal aantal elementen.

$$\text{populatieproportie} = \frac{\text{aantal elementen met een bepaald kenmerk in de populatie}}{\text{totaal aantal elementen in de populatie}}$$

De populatieproportie is altijd een getal tussen 0 en 1. Vaak is het niet mogelijk om de werkelijke populatieproportie te bepalen, dus wordt er gebruikgemaakt van een steekproef. Een steekproef met steekproefomvang n heeft dan als uitslag de steekproefproportie.

- **Steekproefproportie:** aantal elementen met bepaald kenmerk in een steekproef *ten opzichte van* totaal aantal elementen in die steekproef.

$$\text{steekproefproportie} = \frac{\text{aantal elementen met een bepaald kenmerk in de steekproef}}{\text{totaal aantal elementen in de steekproef}}$$

De steekproefproportie is altijd een getal tussen 0 en 1. Bij een representatieve steekproef zal de steekproefproportie ong. gelijk zijn aan de populatieproportie. De steekproefproportie wordt gemeten d.m.v. een steekproef om een goede schatting te krijgen van de populatieproportie.

Een steekproevenverdeling van een proportie of gemiddelde is bij een voldoende grote steekproefomvang bij benadering normaal verdeeld.

Cyclus statistisch onderzoek:

1. Onderzoeksvraag opstellen+ bijbehorende hypothesen
 2. Verzamelen van gegevens
 3. Gegevens analyseren
 4. Conclusies d.m.v. significantie
- Significantie: geeft aan of een verschil te verklaren is door toeval. Er is sprake van significant verschil als de onderzoeksresultaten niet goed te verklaren zijn door toeval, maar iets anders. De meest gebruikte regel hiervoor is de 95% regel. Dit houdt in dat we met 95% zekerheid kunnen vaststellen dat een effect niet is ontstaan door toeval. Er blijft dus 5% kans op toeval over.

Wanneer de steekproefproportie p en omvang van steekproef n bekend zijn, kan je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie als volgt berekenen:

$$\text{linkergrens van het 95\% - betrouwbaarheidsinterval} = p - 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

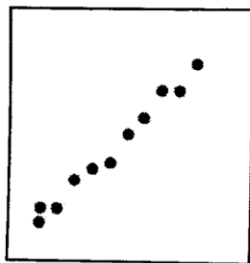
$$\text{rechtergrens van het 95\% - betrouwbaarheidsinterval} = p + 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Hierbij is p de steekproefproportie (getal tussen 0 en 1) en n de omvang van de steekproef. Je kunt ook het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde berekenen, wanneer het gemiddelde, de standaardafwijking van de gemeten waarde in de steekproef en de omvang van de steekproef bekend zijn:

$$\bar{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Hierbij is $\bar{X}$ het steekproefgemiddelde, n de omvang van de steekproef en S de standaardafwijking van de steekproef.

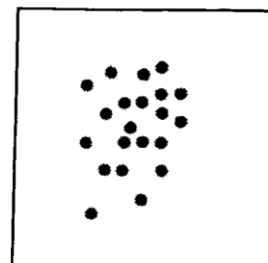
Aan een puntenwolk is te zien of er samenhang is tussen twee variabelen en hoe sterk dat is. Je kunt hier niet zien of er een oorzakelijk verband is. Wanneer de punten naar een rechte lijn neigen, is er correlatie. Als de lijn van linksboven naar rechtsonder gaat, is er negatieve correlatie. De sterkte van correlatie wordt niet weergegeven door de helling van de lijn, maar door spreiding van punten om de lijn heen. Hoe dichter de punten bij elkaar liggen, hoe sterker het verband tussen de twee grootheden is. Als punten willekeurig zijn verspreid, is er geen correlatie.



Sterk positieve correlatie



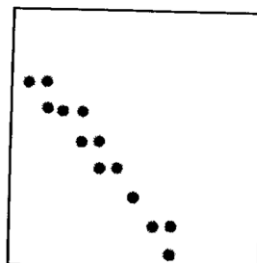
Gemiddeld positieve correlatie



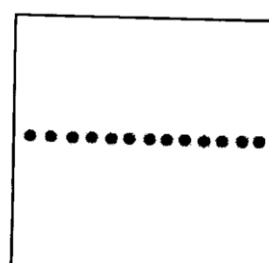
Geen correlatie



Gemiddeld negatieve correlatie



Sterk negatieve correlatie



Geen correlatie