2 Berekenen en bewijzen

Voorkennis Berekeningen in driehoeken

bladzijde 50

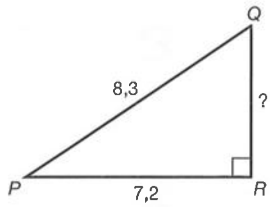
1 In $\triangle ABC$ is $\angle C = 90°$, dus $AC^2 + BC^2 = AB^2$
$25 + 4 = AB^2$
$AB^2 = 29$
$AB = \sqrt{29} \approx 5{,}39$ cm

In $\triangle PQR$ is $\angle P = 90°$, dus $PQ^2 + PR^2 = QR^2$
$PQ^2 + 9 = 33{,}64$
$PQ^2 = 24{,}64$
$PQ = \sqrt{24{,}64} \approx 4{,}96$ cm

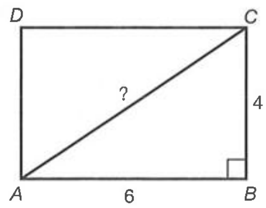
In $\triangle EFG$ is $\angle G = 90°$, dus $EG^2 + FG^2 = EF^2$
$EG^2 + 16 = 21{,}16$
$EG^2 = 5{,}16$
$EG = \sqrt{5{,}16} = 2{,}271...$
Dus $DE = 2 \cdot 2{,}271... \approx 4{,}54$ cm.

bladzijde 51

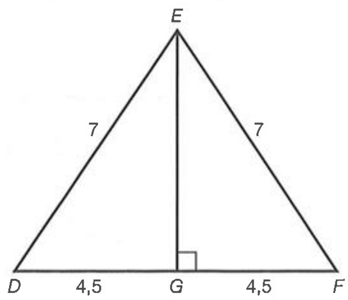
2 **a** $\angle R = 90°$, dus $PR^2 + QR^2 = PQ^2$
$51{,}84 + QR^2 = 68{,}89$
$QR^2 = 17{,}05$
$QR = \sqrt{17{,}05} \approx 4{,}13$ cm



b Zie de figuur hiernaast.
In $\triangle ABC$ is $\angle B = 90°$, dus $AB^2 + BC^2 = AC^2$
$36 + 16 = AC^2$
$AC^2 = 52$
$AC = \sqrt{52} \approx 7{,}21$ cm
Dus elke diagonaal is 7,21 cm.



c In $\triangle EFG$ is $\angle G = 90°$, dus $EG^2 + FG^2 = EF^2$
$EG^2 + 20{,}25 = 49$
$EG^2 = 28{,}75$
$EG = \sqrt{28{,}75} \approx 5{,}36$
Dus de hoogte die bij de zijde DF hoort is 5,36 cm.



3 **a** $\angle A = 180° - 31° - 82° = 67°$ (hoekensom driehoek)
$\angle D_1 = \angle A = 67°$ (F-hoeken)
$\angle E_1 = \angle B = 31°$ (F-hoeken)
b $\angle D = 180° - 105° - 46° = 29°$ (hoekensom driehoek)
$\angle A = \angle D = 29°$ (Z-hoeken)
$\angle B = \angle E = 46°$ (Z-hoeken)
$\angle C_1 = \angle C_2 = 105°$ (overstaande hoeken)

c $\angle A_{12} = \angle B_3 = 68°$ (F-hoeken)
$\angle A_1 = 68° - 38° = 30°$
$\angle B_2 = 180° - 68° - 32° = 80°$ (gestrekte hoek)
$\angle C_1 = \angle A_2 = 38°$ (Z-hoeken)
$\angle D_2 = \angle B_1 = 32°$ (Z-hoeken)
$\angle C_2 = \angle A_1 = 30°$ (Z-hoeken)
$\angle S_3 = 180° - 30° - 32° = 118°$ (hoekensom driehoek)

d $\angle P = \angle Q_1 = 32°$ (basishoeken)
$\angle R = 180° - 90° - 32° = 58°$ (hoekensom driehoek)
$\angle S_1 = 180° - 32° - 32° = 116°$ (hoekensom driehoek)

2.1 Kruisproducten en parallelprojectie

bladzijde 52

1

3	12	2	20	300
5	20	$3\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	500

2 $2 \times 25 = 50$ en $10 \times 5 = 50$, dus $2 \times 25 = 10 \times 5$.
$10 \times 21 = 210$ en $14 \times 15 = 210$, dus $10 \times 21 = 14 \times 15$.
De twee vermenigvuldigingen hebben steeds dezelfde uitkomst.

bladzijde 53

3 **a** $x = \frac{{}^{2}\cancel{4} \cdot 7}{{}^{1}\cancel{2}} = 14$

b $x = \frac{{}^{3}\cancel{12} \cdot 2{,}3}{{}^{1}\cancel{4}} = 6{,}9$

c $x = \frac{5 \cdot {}^{10}\cancel{30}}{{}^{3}\cancel{9}} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

d $x = \frac{8 \cdot {}^{19}\cancel{95}}{{}^{3}\cancel{15}} = \frac{152}{3} = 50\frac{2}{3}$

4 **a** $5 \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x + 3)$
$5x - 5 = 3x + 9$
$2x = 14$
$x = 7$

b $3 \cdot (2x + 1) = 4 \cdot (x - 1)$
$6x + 3 = 4x - 4$
$2x = -7$
$x = -3\frac{1}{2}$

c $12 \cdot (x - 1) = 5 \cdot 7{,}2$
$12x - 12 = 36$
$12x = 48$
$x = 4$

d $2 \cdot x = 4 \cdot (1{,}5 - x)$
$2x = 6 - 4x$
$6x = 6$
$x = 1$

5 **a** $7 \cdot (x + 1) = 2 \cdot (x - 3)$
$7x + 7 = 2x - 6$
$5x = -13$
$x = \frac{-13}{5} = -2\frac{3}{5}$

b $7{,}9 \cdot x = 2{,}3 \cdot (2x + 3)$
$7{,}9x = 4{,}6x + 6{,}9$
$3{,}3x = 6{,}9$
$x = \frac{6{,}9}{3{,}3} = \frac{69}{33} = \frac{23}{11} = 2\frac{1}{11}$

c $x = \frac{9 \cdot 15}{4} = \frac{135}{4} = 33\frac{3}{4}$

d $3 \cdot (7 + 2x) = 2 \cdot (1 - x)$
$21 + 6x = 2 - 2x$
$8x = -19$
$x = \frac{-19}{8} = -2\frac{3}{8}$

bladzijde 54

6 **a**

6	9
21	x

geeft $x = \frac{{}^{3}\cancel{9} \cdot 21}{{}^{2}\cancel{6}} = \frac{63}{2} = 31\frac{1}{2}$

6	y
21	84

geeft $y = \frac{6 \cdot {}^{4}\cancel{84}}{{}^{1}\cancel{21}} = 24$

b

8	$x-3$
15	$x+7,5$

geeft $15 \cdot (x-3) = 8 \cdot (x+7,5)$
$15x - 45 = 8x + 60$
$7x = 105$
$x = 15$

8	$2y$
15	$y-11$

geeft $15 \cdot 2y = 8 \cdot (y-11)$
$30y = 8y - 88$
$22y = -88$
$y = -4$

c

$2x$	$1-x$
4	3

geeft $3 \cdot 2x = 4 \cdot (1-x)$
$6x = 4 - 4x$
$10x = 4$
$x = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\frac{4}{5}$	$3y$
4	15

geeft $4 \cdot 3y = 15 \cdot \frac{4}{5}$
$12y = 12$
$y = 1$

7 **a**

18	x
25	17

geeft $x = \dfrac{17 \cdot 18}{25} = \dfrac{306}{25} = 12\frac{6}{25}$

18	81
25	y

geeft $y = \dfrac{25 \cdot \overset{9}{\cancel{81}}}{\underset{2}{\cancel{18}}} = \dfrac{225}{2} = 112\frac{1}{2}$

b

15	$x+3$
7	x

geeft $15 \cdot x = 7 \cdot (x+3)$
$15x = 7x + 21$
$8x = 21$
$x = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$

15	y
7	$y-5$

geeft $15 \cdot (y-5) = 7 \cdot y$
$15y - 75 = 7y$
$8y = 75$
$y = \frac{75}{8} = 9\frac{3}{8}$

c

$x+5$	x
2	3

geeft $3 \cdot (x+5) = 2 \cdot x$
$3x + 15 = 2x$
$x = -15$

-15	$4y$
3	$1-y$

geeft $-15 \cdot (1-y) = 3 \cdot 4y$
$-15 + 15y = 12y$
$3y = 15$
$y = 5$

8 **a**

8,93	hoogte
654	2820

geeft hoogte $= \dfrac{8{,}93 \cdot 2820}{654} \approx 38{,}51$

Dus de mast is 38,51 meter hoog.

b Ga uit van de gelijkbenige driehoek waarvan AB een been is.
Teken in Paint een lijnstuk langs de basis van de gelijkbenige driehoek en lees het aantal pixels af.
Teken in Paint een lijnstuk uit A loodrecht op de basis van de gelijkbenige driehoek en lees het aantal pixels af.
Bereken met de stelling van Pythagoras de lengte van AB in pixels.
Bereken met een verhoudingstabel de lengte van de schuine buis AB in meters.

c *

9 **a** De lengte van de schaduw verandert niet.
b De schaduw schuift steeds verder omhoog.

bladzijde 55

10 **a** 4 kubussen hebben een schaduw van 6 cm, dus 1 kubus heeft een schaduw van $\frac{6}{4} = 1{,}5$ cm, dus als je zes van zulke kubussen opstapelt is de schaduw $6 \cdot 1{,}5 = 9$ cm.
b 1 kubus heeft een schaduw van 1,5 cm, dus een toren met een schaduw van 24 cm bestaat uit $\frac{24}{1{,}5} = 16$ kubussen.
c

aantal kubussen	4	6	16	20	40
lengte schaduw in cm	6	9	24	30	60

bladzijde 56

11 $\begin{array}{c|c|c|c} 20 & 30 & 18 & 15 \\ \hline 22 & a & b & c \end{array}$ is een verhoudingstabel.

Splitsen geeft

$\begin{array}{c|c} 20 & 30 \\ \hline 22 & a \end{array}$, dus $a = \frac{22 \cdot 30}{20} = 33$ meter,

$\begin{array}{c|c} 20 & 18 \\ \hline 22 & b \end{array}$, dus $b = \frac{22 \cdot 18}{20} = 19{,}8$ meter en

$\begin{array}{c|c} 20 & 15 \\ \hline 22 & c \end{array}$, dus $c = \frac{22 \cdot 15}{20} = 16{,}5$ meter.

12 **a** $\begin{array}{c|c|c} 22 & x & 32 \\ \hline y & 20 & 40 \end{array}$ is een verhoudingstabel.

Splitsen geeft

$\begin{array}{c|c} 22 & 32 \\ \hline y & 40 \end{array}$, dus $y = \frac{22 \cdot 40}{32} = 27{,}5$ meter.

Dus de toren is $40 + 20 + 27{,}5 = 87{,}5$ meter hoog.

b Splitsen van de verhoudingstabel van vraag a geeft ook $\begin{array}{c|c} x & 32 \\ \hline 20 & 40 \end{array}$,
dus $x = \frac{20 \cdot 32}{40} = 16$ meter.
De schaduw is $22 + 16 + 32 = 70$ meter lang.

13 a $QR = x + 1$ meter en $PQ = x + 2$ meter.

$\begin{array}{c|c|c} PQ & QR & RS \\ \hline P'Q' & Q'R' & R'S' \end{array}$ ofwel $\begin{array}{c|c|c} x+2 & x+1 & x \\ \hline P'Q' & 18{,}75 & 17{,}50 \end{array}$ is een verhoudingstabel.

Splitsen geeft

$\begin{array}{c|c} x+1 & x \\ \hline 18{,}75 & 17{,}50 \end{array}$, dus $18{,}75 \cdot x = 17{,}50 \cdot (x + 1)$

$18{,}75x = 17{,}50x + 17{,}50$

$1{,}25x = 17{,}50$

$x = 14$

Dus $PQ = 16$ meter, $QR = 15$ meter en $PS = 14 + 15 + 16 = 45$ meter.

b Uit vraag a volgt dat $\begin{array}{c|c|c} 16 & 15 & 14 \\ \hline P'Q' & 18{,}75 & 17{,}50 \end{array}$ een verhoudingstabel is.

Splitsen geeft

$\begin{array}{c|c} 16 & 15 \\ \hline P'Q' & 18{,}75 \end{array}$, dus $P'Q' = \dfrac{16 \cdot 18{,}75}{15} = 20$ meter.

14 $\begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline AD & DE \end{array}$ ofwel $\begin{array}{c|c} AB & 16 \\ \hline 158 & 20 \end{array}$ is een verhoudingstabel.

$AB = \dfrac{16 \cdot 158}{20} = 126{,}4$ meter

bladzijde 57

15 a
- Teken een halve lijn l met eindpunt A.
- Zet met de passer op l drie lijnstukken met gelijke lengte uit.
  Teken daartoe een cirkelboogje met middelpunt A en straal r. Het snijpunt van dit cirkelboogje en l is C.
  Teken een cirkelboogje met middelpunt C en straal r. Het snijpunt van dit cirkelboogje en l is D.
  Teken een cirkelboogje met middelpunt D en straal r. Het snijpunt van dit cirkelboogje en l is E.
- De lijnstukken AC, CD en DE hebben alle lengte r.
- Teken de lijn m door B en E.
- Construeer de lijn n door D evenwijdig met m. Ga daarbij als volgt te werk.
  - Teken een cirkel met middelpunt E. Het snijpunt met l is F en het snijpunt met m is G.
  - Teken een even grote cirkel met middelpunt D. Je krijgt snijpunt H met l.
  - Neem FG tussen de passer en teken $\odot(H, FG)$. Je krijgt snijpunt I met $\odot(D, DH)$.
  - Teken de lijn n door D en I, n is evenwijdig met m.
  - Het snijpunt van n en AB is J.
- Construeer op dezelfde manier de lijn p door C evenwijdig met m. Het snijpunt van p en AB is K.
- Er geldt $AK = JK = BJ$. Je hebt dus lijnstuk AB in drie gelijke stukken verdeeld.

b *

c Om een gegeven lijnstuk AB in vier gelijke stukken te verdelen construeer je de middelloodlijn k van AB.
Het snijpunt M van k en AB is het midden van AB. Construeer vervolgens de middelloodlijnen l en m van AM en BM. Het snijpunt N van l en AM is het midden van AM en het snijpunt P van m en BM is het midden van BM. Er geldt $AN = MN = MP = BP$.
Om een lijnstuk in vier gelijke stukken te verdelen heb je dus niet de bij de vragen a en b gebruikte methode nodig.

2.2 Gelijkvormigheid

bladzijde 58

16 **a** De vergrotingsfactor is $k = \dfrac{AC'}{AB'} = \dfrac{6}{3} = 2$.

b $CC' = k \cdot BB' = 2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2$ meter
$AC = k \cdot AB = 2 \cdot 2{,}4 = 4{,}8$ meter
$BC = AC - AB = 4{,}8 - 2{,}4 = 2{,}4$ meter

c

2,4	1,6	3
4,8	3,2	6

Ja, de tabel is een verhoudingstabel.

bladzijde 59

17 **a** $\triangle ABC \backsim \triangle QRP$

b $\triangle ABC \backsim \triangle QRP$, dus

$\triangle ABC$	AB	BC	AC
$\triangle QRP$	QR	RP	QP

18	16	12
8	RP	QP

Je krijgt $RP = \dfrac{{}^{4}\cancel{8} \cdot 16}{{}^{9}\cancel{18}} = \dfrac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$ en $QP = \dfrac{8 \cdot {}^{2}\cancel{12}}{{}^{3}\cancel{18}} = \dfrac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.

18 **a** $\triangle PQR \backsim \triangle PTS$

b $\triangle PQR \backsim \triangle PTS$, dus

$\triangle PQR$	PQ	QR	PR
$\triangle PTS$	PT	TS	PS

12	8	7
5	TS	PS

Je krijgt $PS = \dfrac{5 \cdot 7}{12} = \dfrac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$ en $TS = \dfrac{5 \cdot {}^{2}\cancel{8}}{{}^{3}\cancel{12}} = \dfrac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

19 **a** $\triangle ABC \backsim \triangle EBD$

b $\triangle ABC \backsim \triangle EBD$, dus

$\triangle ABC$	AB	BC	AC
$\triangle EBD$	EB	BD	ED

6,1	3,2	4,3
EB	BD	7,6

Je krijgt $BD = \dfrac{3{,}2 \cdot 7{,}6}{4{,}3} \approx 5{,}7$ en $EB = \dfrac{6{,}1 \cdot 7{,}6}{4{,}3} \approx 10{,}8$.

bladzijde 60

20 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \text{ (gegeven)} \\ \angle B = \angle E \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle AED$

b

$\triangle ABC$	AB	BC	AC
$\triangle AED$	AE	ED	AD

geeft

6	4	3
8	ED	AD

$ED = \dfrac{{}^{2}\cancel{4} \cdot 8}{{}^{3}\cancel{6}} = \dfrac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$

$AD = \dfrac{3 \cdot 8}{6} = \dfrac{24}{6} = 4$

$CD = AD - AC = 4 - 3 = 1$

21 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ADE) \\ \angle C_1 = \angle D \; (= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle AED$

b

$\triangle ABC$	AB	BC	AC	geeft	5	4	3
$\triangle AED$	AE	ED	AD		AE	9	AD

$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB^2 = 9 + 16 = 25$
$AB = \sqrt{25} = 5$

$AE = \frac{5 \cdot 9}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$

$AD = \frac{3 \cdot 9}{4} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$

22 $BD^2 = BE^2 + DE^2$
$BD^2 = 144 + 25 = 169$
$BD = \sqrt{169} = 13$

$\left.\begin{array}{l}\angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE) \\ \angle A = \angle E \; (= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle EBD$

$\triangle ABC$	AB	BC	AC	geeft	18	BC	AC
$\triangle EBD$	EB	BD	ED		12	13	5

$BC = \frac{{}^{3}\cancel{18} \cdot 13}{{}^{2}\cancel{12}} = \frac{39}{2} = 19\frac{1}{2}$

$CE = BC - BE = 19\frac{1}{2} - 12 = 7\frac{1}{2}$

23 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ACD) \\ \angle C_{12} = \angle D \; (= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle ACD$

b

$\triangle ABC$	AB	BC	AC	geeft	25	15	20
$\triangle ACD$	AC	CD	AD		20	CD	AD

$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB^2 = 400 + 225 = 625$
$AB = \sqrt{625} = 25$

$AD = \frac{20 \cdot 20}{25} = \frac{400}{25} = 16$

$BD = AB - AD = 25 - 16 = 9$

24 $\left.\begin{array}{l}\angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE) \\ \angle A = \angle D \; (= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DBE$

$\triangle ABC$	AB	BC	AC	geeft	3,5	BC	1,76
$\triangle DBE$	DB	BE	DE		68,4	BE	DE

$DE = \frac{1{,}76 \cdot 68{,}4}{3{,}5} \approx 34{,}4$

Dus de hoogspanningsmast is 34,4 meter hoog.

25 $\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle C \text{ (in } \triangle ACD) \\ \angle C \text{ (in } \triangle BCF) = \angle A \; (= 90°)\end{array}\right\} \triangle BCF \backsim \triangle CAD$

$\triangle BCF$	BC	CF	BF	geeft	5	CF	7
$\triangle CAD$	CA	AD	CD		8	AD	CD

$CD = \frac{7 \cdot 8}{5} = 11{,}2$

Dus de ladder CD is 11,2 meter.

2.3 Gelijkvormige driehoeken

bladzijde 62

26 $\triangle BEF \backsim \triangle AED$ en $\triangle BEF \backsim \triangle CDF$

bladzijde 63

27 $\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle D_1 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle C \text{ (in } \triangle ABC) = \angle C \text{ (in } \triangle CDE) \end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DEC$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \triangle ABC & AB & BC & AC \\ \hline \triangle DEC & DE & EC & DC \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 30 & BC & AC \\ \hline 20 & 21 & 24 \end{array}$$

$AC = \dfrac{24 \cdot 30}{20} = 36$

$AD = AC - CD = 36 - 24 = 12$

$BC = \dfrac{21 \cdot {}^{3}\cancel{30}}{{}^{2}\cancel{20}} = \dfrac{63}{2} = 31\tfrac{1}{2}$

$BE = BC - CE = 31\tfrac{1}{2} - 21 = 10\tfrac{1}{2}$

28 $QS^2 = QR^2 + RS^2$

$QS^2 = 64 + 36 = 100$

$QS = \sqrt{100} = 10$

$\left.\begin{array}{l} \angle P = \angle R \text{ (} = 90°\text{)} \\ \angle T = \angle S \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle PQT \backsim \triangle RQS$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \triangle PQT & PQ & QT & PT \\ \hline \triangle RQS & RQ & QS & RS \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 20 & QT & PT \\ \hline 8 & 10 & 6 \end{array}$$

$PT = \dfrac{6 \cdot 20}{8} = \dfrac{120}{8} = 15$

$QT = \dfrac{10 \cdot 20}{8} = \dfrac{200}{8} = 25$

29 $\left.\begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle APQ) = \angle D \text{ (F-hoeken)} \\ \angle P \text{ (in } \triangle APQ) = \angle P \text{ (in } \triangle CDP) \end{array}\right\} \triangle APQ \backsim \triangle DPC$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \triangle APQ & AP & PQ & AQ \\ \hline \triangle DPC & DP & PC & DC \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 3 & PQ & AQ \\ \hline 9 & PC & 12 \end{array}$$

$AQ = \dfrac{3 \cdot 12}{9} = \dfrac{36}{9} = 4$

30 $\begin{array}{c|c} PQ & QT \\ \hline PR & RS \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} PQ & 1{,}9 \\ \hline PR & 3{,}1 \end{array}$

Je kunt PQ niet berekenen met $PQ = \dfrac{\text{kruisproduct}}{\text{overblijvende getal}}$ omdat je PR niet weet.

31 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle E \text{ (in } \triangle ADE) = \angle E \text{ (in } \triangle CEF) \\ \angle D = \angle C \;(= 90°)\end{array}\right\} \triangle ADE \backsim \triangle FCE$

$$\begin{array}{c|c} AD & DE \\ \hline FC & CE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 6 & x+8{,}4 \\ \hline 1{,}8 & x \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Stel } CE = x \text{, dan is } DE = x + 8{,}4.}$$

$6x = 1{,}8(x + 8{,}4)$
$6x = 1{,}8x + 15{,}12$
$4{,}2x = 15{,}12$
$x = \dfrac{15{,}12}{4{,}2} = 3{,}6$
Dus $CE = 3{,}6$.

b $EF^2 = CE^2 + CF^2$
$EF^2 = 3{,}6^2 + 1{,}8^2 = 16{,}2$
$EF = \sqrt{16{,}2} \approx 4{,}0$

32 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle E \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle A = \angle D \;(= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DEC$

$$\begin{array}{c|c} BC & AC \\ \hline EC & DC \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 6{,}2 & x \\ \hline 2{,}6 & 6{,}6-x \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Stel } AC = x \text{, dan is } CD = 6{,}6 - x.}$$

$2{,}6x = 6{,}2(6{,}6 - x)$
$2{,}6x = 40{,}92 - 6{,}2x$
$8{,}8x = 40{,}92$
$x = \dfrac{40{,}92}{8{,}8} = 4{,}65$
Dus $AC = 4{,}65$.

b $AB^2 = BC^2 - AC^2$
$AB^2 = 6{,}2^2 - 4{,}65^2 = 16{,}8175$
$AB = \sqrt{16{,}8175} = 4{,}100...$
opp $\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4{,}100... \cdot 4{,}65 \approx 9{,}5$

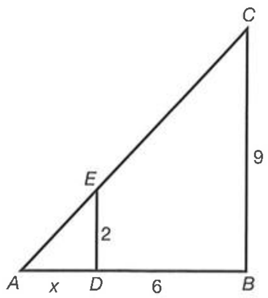
33 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle Q \text{ (in } \triangle ABQ) = \angle Q \text{ (in } \triangle CPQ) \\ \angle B = \angle C \;(= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABQ \backsim \triangle PCQ$

$$\begin{array}{c|c} AB & BQ \\ \hline PC & CQ \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 8 & 7 \\ \hline CP & 3 \end{array}$$

$CP = \dfrac{3 \cdot 8}{7} = \dfrac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$

b $DP = CD - CP = 8 - 3\frac{3}{7} = 4\frac{4}{7}$
$AP^2 = AD^2 + DP^2$
$AP^2 = 4^2 + (4\frac{4}{7})^2 = 36{,}897...$
$AP = \sqrt{36{,}897...} \approx 6{,}1$

34 **a** Zie de figuur hiernaast.

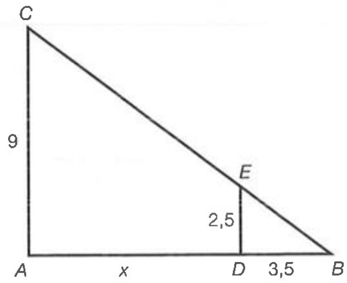


$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ABC) = \angle A \text{ (in } \triangle ADE) \\ \angle B = \angle D \;(= 90°)\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle ADE$

$$\begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline AD & DE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} x+6 & 9 \\ \hline x & 2 \end{array}$$

$9x = 2(x + 6)$
$9x = 2x + 12$
$7x = 12$
$x = \frac{12}{7} \approx 1{,}7$
Dus de lengte van deze schaduw is 1,7 meter.

b Zie de figuur hiernaast met $AD = x$ en $AB = x + 3{,}5$.

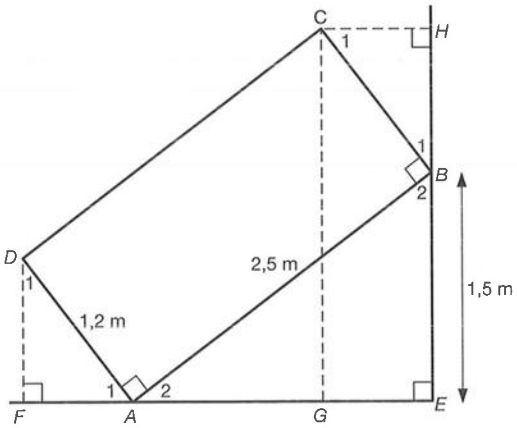


$$\left.\begin{array}{l}\angle B \text{ (in } \triangle ABC) = \angle B \text{ (in } \triangle BDE) \\ \angle A = \angle D\ (= 90^\circ)\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DBE$$

$$\begin{array}{c|c} AB & AC \\ \hline DB & DE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} x+3{,}5 & 9 \\ \hline 3{,}5 & 2{,}5 \end{array}$$

$2{,}5(x + 3{,}5) = 9 \cdot 3{,}5$
$2{,}5x + 8{,}75 = 31{,}5$
$2{,}5x = 22{,}75$
$x = \frac{22{,}75}{2{,}5} = 9{,}1$
De afstand van de rechtermuur tot de lantaarnpaal is 9,1 meter.

35 **a**



In $\triangle AFD$ is $\angle D_1 = 180^\circ - 90^\circ - \angle A_1 = 90^\circ - \angle A_1$ (hoekensom driehoek).
Verder is $\angle A_2 = 180^\circ - 90^\circ - \angle A_1 = 90^\circ - \angle A_1$ (gestrekte hoek).
Dus $\angle D_1 = \angle A_2$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle D_1 = \angle A_2 \\ \angle F = \angle E\ (= 90^\circ)\end{array}\right\} \triangle ADF \backsim \triangle BAE$$

$$\begin{array}{c|c} AD & DF \\ \hline BA & AE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 1{,}2 & DF \\ \hline 2{,}5 & 2 \end{array} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{l} AE^2 = AB^2 - BE^2 \\ AE^2 = 6{,}25 - 2{,}25 = 4 \\ AE = \sqrt{4} = 2 \end{array}}$$

$$DF = \frac{2 \cdot 1{,}2}{2{,}5} = 0{,}96$$

Dus de hoogte van het punt D is 0,96 meter.

b In $\triangle BCH$ is $\angle C_1 = 180^\circ - 90^\circ - \angle B_1 = 90^\circ - \angle B_1$ (hoekensom driehoek).
Verder is $\angle B_2 = 180^\circ - 90^\circ - \angle B_1 = 90^\circ - \angle B_1$ (gestrekte hoek).
Dus $\angle C_1 = \angle B_2$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle B_2 = \angle C_1 \\ \angle E = \angle H\ (= 90^\circ)\end{array}\right\} \triangle AEB \backsim \triangle BHC$$

$$\begin{array}{c|c} AE & AB \\ \hline BH & BC \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 2 & 2{,}5 \\ \hline BH & 1{,}2 \end{array}$$

$$BH = \frac{2 \cdot 1{,}2}{2{,}5} = 0{,}96$$

Dus de hoogte van het punt C is $1{,}5 + 0{,}96 = 2{,}46$ meter.

36 $DE^2 = CD^2 + CE^2$
$DE^2 = 144 + 25 = 169$
$DE = \sqrt{169} = 13$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ADS) = \angle C \text{ (in } \triangle CES) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D \text{ (in } \triangle ADS) = \angle E \text{ (in } \triangle CES) \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ADS \backsim \triangle CES$$

$$\begin{array}{c|c} AD & DS \\ \hline CE & ES \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 7 & x \\ \hline 5 & 13-x \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Stel } DS = x \text{, dan is } ES = 13 - x.}$$

$5x = 7(13 - x)$
$5x = 91 - 7x$
$12x = 91$
$x = \frac{91}{12} \approx 7{,}6$
Dus $DS \approx 7{,}6$.

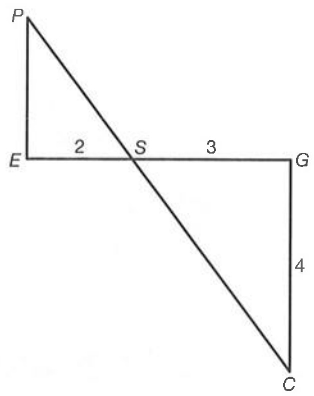
bladzijde 66

37 De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, dus $AC = \sqrt{25} = 5$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle E = \angle G \ (= 90°) \\ \angle P = \angle C \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle EPS \backsim \triangle GCS$$

$$\begin{array}{c|c} EP & ES \\ \hline GC & GS \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} EP & 2 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

$$EP = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3}$$



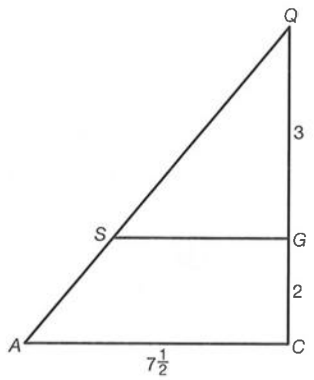
38 De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + (4\frac{1}{2})^2 = 36 + 20\frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$, dus $AC = \sqrt{56\frac{1}{4}} = 7\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle C = \angle G \ (= 90°) \\ \angle Q \text{ (in } \triangle ACQ) = \angle Q \text{ (in } \triangle GQS)\end{array}\right\} \triangle ACQ \backsim \triangle SGQ$$

$$\begin{array}{c|c} AC & CQ \\ \hline SG & GQ \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 7\frac{1}{2} & 5 \\ \hline GS & 3 \end{array}$$

$$GS = \frac{3 \cdot 7\frac{1}{2}}{5} = \frac{22\frac{1}{2}}{5} = 4\tfrac{1}{2}$$

Dus $ES = 7\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = 3$.



2.4 Stelling en bewijs

bladzijde 67

39 **a** $\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180°$ (hoekensom driehoek)

b $$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180° \\ \angle A = \angle C_1 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B = \angle C_3 \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \angle A + \angle C_2 + \angle B = 180°$$

Dus de som van de hoeken in een driehoek is 180°.

bladzijde 68

40 **a** $\left.\begin{array}{l} a = b \\ a + b = 120 \end{array}\right\} a = 60$

b $\left.\begin{array}{l} a + b = 180 \\ a - b = 30 \end{array}\right\} a = 105$

c $\left.\begin{array}{l} a > b \\ b > c \end{array}\right\} a > c$

d $\left.\begin{array}{l} a \cdot b = 0 \\ b \neq 0 \end{array}\right\} a = 0$

41 $\left.\begin{array}{l} \angle B_2 = \angle B_3 \text{ (bissectrice)} \\ \angle A = \angle B_3 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle C = \angle B_2 \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \angle A = \angle C$

$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \text{Een driehoek met twee gelijke} \\ \text{hoeken is gelijkbenig.} \end{array}\right\} \triangle ABC \text{ is gelijkbenig}$

42 $\left.\begin{array}{r} AC = BC, \text{ dus } \angle A = \angle B_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle B_1 = \angle B_3 \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \angle A = \angle B_3$

$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle B_3 \\ \text{Bij gelijke F-hoeken horen} \\ \text{evenwijdige lijnen.} \end{array}\right\} AC\ //\ BE$

43 $\left.\begin{array}{l} \angle C = 180° - 90° - \angle B_1 = 90° - \angle B_1 \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle D = 180° - 90° - \angle B_2 = 90° - \angle B_2 \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle B_1 = \angle B_2 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \angle C = \angle D$

bladzijde 69

44 $\left.\begin{array}{l} \text{In } \triangle ACD \text{ is } AD = CD, \text{ dus } \angle A_1 = \angle C_1 \\ \qquad \text{(gelijkbenige driehoek).} \\ \angle A_1 = \angle A_2 \text{ (bissectrice)} \end{array}\right\} \angle C_1 = \angle A_2$

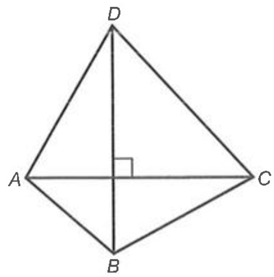
$\left.\begin{array}{l} \angle C_1 = \angle A_2 \\ \text{Bij gelijke Z-hoeken horen} \\ \text{evenwijdige lijnen.} \end{array}\right\} AB\ //\ CD$

45 $\left.\begin{array}{l} \angle E = 180° - \angle C - \angle A \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle B_1 = 180° - \angle C - \angle D_1 \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle A = \angle D_1 \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \angle E = \angle B_1$

46 Deze stelling is niet juist.
Als je in de derde figuur de derde lijn iets rechts van het middelpunt tekent, krijg je 7 gebieden.

bladzijde 70

47 **a** $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ en $0{,}5 > 0{,}25$.
b In de vierhoek $ABCD$ hieronder zijn de diagonalen AC en BD even lang, maar $ABCD$ is geen rechthoek.



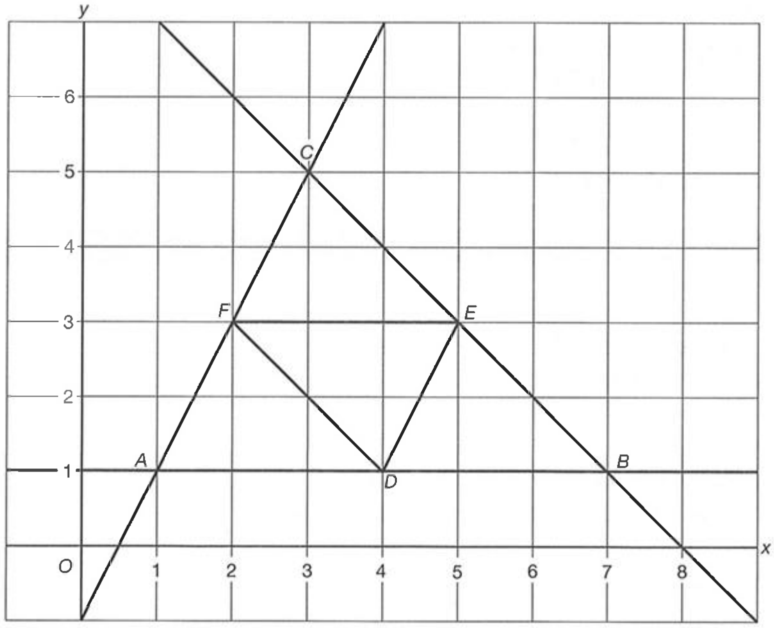
c 2 is een even priemgetal.
d Zie vierhoek $ABCD$ vraag b. De diagonalen staan loodrecht op elkaar, maar $ABCD$ is geen ruit.

48 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle Q \text{ (in } \triangle APQ) = \angle B \text{ (F-hoeken)} \\ \angle P \text{ (in } \triangle APQ) = \angle C \text{ (F-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle AQP \backsim \triangle ABC$
b Omdat P het midden is van de zijde AC is $\dfrac{AP}{AC} = \frac{1}{2}$.
c Ja, Q is het midden van de zijde AB.
Ja, PQ is de helft van BC.

bladzijde 71

49 **a** $CD = BD = 3$
$EF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$
$AC = 2DF = 2 \cdot 2 = 4$
$EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$
Dus de omtrek van vierhoek $EFDC$ is $3 + 2 + 3 + 2 = 10$.
b $BC = BD + CD = 3 + 3 = 6$
$\angle A = \angle C$, dus $AB = BC = 6$.
$AC = 4$ (zie a)
Dus de omtrek van $\triangle ABC$ is $6 + 6 + 4 = 16$.

50 Teken door D de lijn evenwijdig met EF, teken door E de lijn evenwijdig met DF en teken door F de lijn evenwijdig met DE. De snijpunten van deze lijnen zijn de hoekpunten A, B en C van driehoek ABC.



51 **a** In $\triangle ACD$ is lijnstuk PQ middenparallel, dus $PQ = \frac{1}{2}AC$.
In $\triangle ABC$ is lijnstuk RS middenparallel, dus $RS = \frac{1}{2}AC$.
Dus $PQ = RS$.
b In $\triangle ACD$ is lijnstuk PQ middenparallel, dus $PQ \,//\, AC$.
In $\triangle ABC$ is lijnstuk RS middenparallel, dus $RS \,//\, AC$.
Dus $PQ \,//\, RS$.
c In $\triangle ABD$ is lijnstuk PS middenparallel, dus $PS \,//\, BD$.
In $\triangle BCD$ is lijnstuk QR middenparallel, dus $QR \,//\, BD$.
$\left.\begin{array}{l}\text{Dus } PS \,//\, QR. \\ \quad PQ \,//\, RS \text{ (zie b)}\end{array}\right\} PQRS \text{ is een parallellogram.}$

52 PR is een middenparallel, dus $PR \,//\, BC$, dus $\angle R_1 = \angle C_1$ (Z-hoeken) en $\angle P_1 = \angle B_1$ (Z-hoeken).

53 **a** PS is zwaartelijn, dus $QS = \frac{1}{2}QR = 5$.
Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle PQS$
$PS^2 = PQ^2 + QS^2 = 144 + 25 = 169$.
Dus $PS = \sqrt{169} = 13$.
Z is zwaartepunt, dus $PZ = \frac{2}{3}PS = \frac{2}{3} \cdot 13 = 8\frac{2}{3}$ en $SZ = \frac{1}{3}PS = \frac{1}{3} \cdot 13 = 4\frac{1}{3}$.

b RT is zwaartelijn, dus $QT = \frac{1}{2}PQ = 6$.
Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle QRT$
$RT^2 = QR^2 + QT^2 = 100 + 36 = 136$.
Dus $RT = \sqrt{136} \approx 11{,}66$.
Z is zwaartepunt, dus $TZ = \frac{1}{3}RT = \frac{1}{3}\sqrt{136} \approx 3{,}89$ en
$RZ = \frac{2}{3}RT = \frac{2}{3}\sqrt{136} \approx 7{,}77$.

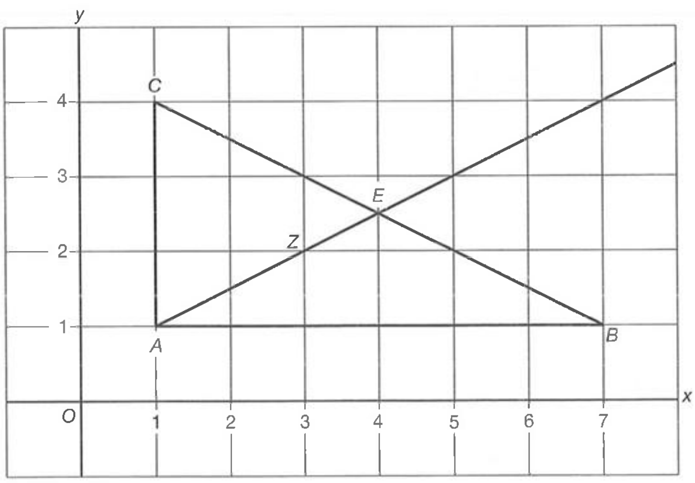
54 Z is zwaartepunt, dus $DZ : AZ = 1 : 2$.
$AZ = 12$, dus $DZ = 12 : 2 = 6$, dus $AD = 12 + 6 = 18$.
Verder is $BZ = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$.

55 **a** Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle ABC$
$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 12{,}5^2 - 10^2 = 56{,}25$.
Dus $BC = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$.
CP is zwaartelijn, dus $BP = \frac{1}{2}AB = 5$.
Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle BCP$
$CP^2 = BC^2 + BP^2 = 56{,}25 + 25 = 81{,}25$.
Dus $CP = \sqrt{81{,}25} \approx 9{,}01$.
Z is zwaartepunt, dus $CZ = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3}\sqrt{81{,}25} \approx 6{,}01$.

b AQ is zwaartelijn, dus $BQ = \frac{1}{2}BC = 3{,}75$.
Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle ABQ$
$AQ^2 = AB^2 + BQ^2 = 10^2 + 3{,}75^2 = 114{,}0625$.
Dus $AQ = \sqrt{114{,}0625} \approx 10{,}68$.
Z is zwaartepunt, dus $QZ = \frac{1}{3}AQ = \frac{1}{3}\sqrt{114{,}0625} \approx 3{,}56$.

c PR is middenparallel van $\triangle ABC$, dus $PR = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 = 3{,}75$.

56 **a,b,c**
Z is zwaartepunt, dus er moet gelden $AZ : EZ = 2 : 1$.
Van A naar Z is 2 naar rechts en 1 omhoog, dus van Z naar E is 1 naar rechts en 0,5 omhoog.
Teken $E(3 + 1; 2 + 0{,}5) = E(4; 2{,}5)$.
AE is zwaartelijn, dus E is het midden van BC, dus $BE = CE$.
Van B naar E is 3 naar links en 1,5 omhoog, dus van E naar C is ook 3 naar links en 1,5 omhoog.
Teken $C(4 - 3; 2{,}5 + 1{,}5) = C(1, 4)$.



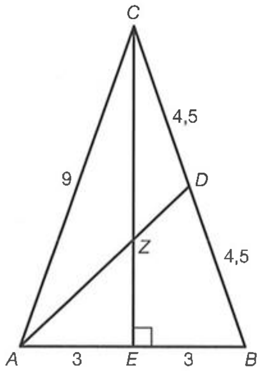
c $C(1, 4)$

57 **a** $BQ = \frac{1}{2}AB = 4$
Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle BCQ$
$CQ^2 = BC^2 - BQ^2 = 25 - 16 = 9$.
Dus $CQ = \sqrt{9} = 3$.
CQ en BP zijn zwaartelijnen, dus Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus
$QZ = \frac{1}{3}CQ = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

b Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle BQZ$
$BZ^2 = BQ^2 + QZ^2 = 16 + 1 = 17$.
Dus $BZ = \sqrt{17} \approx 4{,}1$.

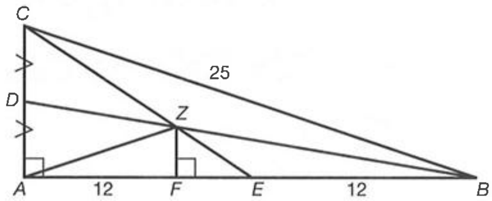
c Z is zwaartepunt, dus $BZ = \frac{2}{3}BP$ ofwel $\frac{2}{3}BP = \sqrt{17}$
$3 \cdot \frac{2}{3}BP = 3 \cdot \sqrt{17}$
$2BP = 3\sqrt{17}$
$BP = 1\frac{1}{2}\sqrt{17} \approx 6{,}2$

58 **a** Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle ACE$
$CE^2 = AC^2 - AE^2 = 81 - 9 = 72$.
Dus $CE = \sqrt{72}$.
Z is zwaartepunt, dus $EZ = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{3}\sqrt{72} = 2{,}828...$
opp $\triangle ABZ = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot EZ = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}828... \approx 8{,}5$



b Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle AEZ$
$AZ^2 = AE^2 + EZ^2 = 3^2 + 2{,}828\ldots^2 = 17$.
Dus $AZ = \sqrt{17}$.
Z is zwaartepunt, dus $AZ = \frac{2}{3}AD$ ofwel $\frac{2}{3}AD = \sqrt{17}$
$3 \cdot \frac{2}{3}AD = 3 \cdot \sqrt{17}$
$2AD = 3\sqrt{17}$
$AD = 1\frac{1}{2}\sqrt{17} \approx 6{,}2$

59 Volgens de stelling van Pythagoras is in $\triangle ABC$
$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 25^2 - 24^2 = 49$.
Dus $AC = \sqrt{49} = 7$.
BD is zwaartelijn, dus $AD = \frac{1}{2}AC = 3\frac{1}{2}$.
Z is zwaartepunt, dus $BZ = \frac{2}{3}BD$ ofwel $\dfrac{BZ}{BD} = \dfrac{2}{3}$.



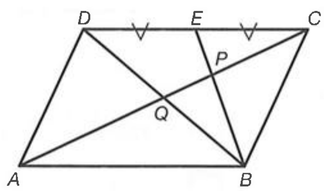
$$\left.\begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ABD) = \angle F \text{ (in } \triangle BFZ) \; (= 90°) \\ \angle B \text{ (in } \triangle ABD) = \angle B \text{ (in } \triangle BFZ) \end{array}\right\} \triangle ABD \backsim \triangle FBZ$$

$$\begin{array}{c|c} AD & BD \\ \hline FZ & BZ \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 3\frac{1}{2} & 3 \\ \hline FZ & 2 \end{array}$$

$$FZ = \frac{2 \cdot 3\frac{1}{2}}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

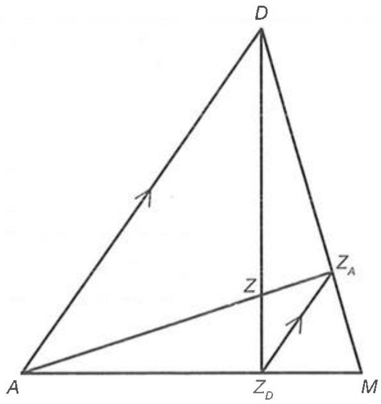
Dus opp $\triangle ABZ = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot FZ = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2\frac{1}{3} = 28$.

60 **a** Zie de figuur hiernaast.
E is het midden van CD, dus BE is zwaartelijn van $\triangle BCD$.
In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor,
dus Q is het midden van BD, dus CQ is zwaartelijn van $\triangle BCD$.
BE en CQ snijden elkaar in P, dus P is het zwaartepunt van $\triangle BCD$.



b In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor, dus
$CQ = \frac{1}{2}AC$.
P is zwaartepunt van $\triangle BCD$, dus $CP = \frac{2}{3}CQ$.
Uit bovenstaande volgt $CP = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$.
Dus CP is $\frac{1}{3}$ deel van AC.

61 **a** Zie de figuur hiernaast.



$$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ADM) = \angle Z_D \text{ (in } \triangle Z_AZ_DM) \text{ (F-hoeken)} \\ \angle M \text{ (in } \triangle ADM) = \angle M \text{ (in } \triangle Z_AZ_DM)\end{array}\right\} \triangle ADM \backsim \triangle Z_DZ_AM$$

Z_D is zwaartepunt van $\triangle ABC$, dus $MZ_D = \frac{1}{3}AM$.

$\triangle ADM \backsim \triangle Z_DZ_AM$ en $MZ_D = \frac{1}{3}AM$, dus $Z_AZ_D = \frac{1}{3}AD$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ADZ) = \angle Z_A \text{ (in } \triangle Z_AZ_DZ) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D \text{ (in } \triangle ADZ) = \angle Z_D \text{ (in } \triangle Z_AZ_DZ) \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ADZ \backsim \triangle Z_AZ_DZ$$

$\triangle ADZ \backsim \triangle Z_AZ_DZ$ en $Z_AZ_D = \frac{1}{3}AD$, dus $Z_DZ = \frac{1}{3}DZ$ ofwel $\dfrac{Z_DZ}{DZ} = \frac{1}{3}$

en $Z_AZ = \frac{1}{3}AZ$ ofwel $\dfrac{Z_AZ}{AZ} = \frac{1}{3}$.

Dus de zwaartelijnen AZ_A en DZ_D verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1 : 3.

Op dezelfde manier kun je voor elk ander tweetal zwaartelijnen van een viervlak bewijzen dat ze elkaar verdelen in stukken die zich verhouden als 1 : 3.

b AZ_A, BZ_B, CZ_C en DZ_D zijn de zwaartelijnen van het viervlak.

$$\left.\begin{array}{l}BZ_B \text{ verdeelt } AZ_A \text{ in stukken die zich verhouden als } 1:3. \\ CZ_C \text{ verdeelt } AZ_A \text{ in stukken die zich verhouden als } 1:3. \\ DZ_D \text{ verdeelt } AZ_A \text{ in stukken die zich verhouden als } 1:3.\end{array}\right\} AZ_A,\ BZ_B,\ CZ_C \text{ en } DZ_D \text{ gaan door één punt.}$$

2.5 Stellingen en cirkels

bladzijde 75

62 **a**
$$\left.\begin{array}{l}\text{In } \triangle ABC \text{ is } \angle A + \angle C = 180° - \angle B_1 \text{ (hoekensom driehoek).} \\ \angle B_2 = 180° - \angle B_1 \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \angle B_2 = \angle A + \angle C$$

b In vraag a is $\angle B_2$ een buitenhoek van $\triangle ABC$ en zijn $\angle A$ en $\angle C$ de twee niet-aanliggende binnenhoeken van $\angle B$. Je hebt bewezen dat $\angle B_2 = \angle A + \angle C$, dus dat een buitenhoek van een driehoek gelijk is aan de som van de twee niet-aanliggende binnenhoeken.

63 **a** In $\triangle AMP$ is $AM = MP$, dus $\angle A = \angle P_1$ (basishoeken).
$\angle M_1 = \angle A + \angle P_1$ (zie opgave 62)

b $\angle A = \angle P_1$, dus $\angle M_1 = \angle A + \angle P_1 = \angle P_1 + \angle P_1 = 2 \cdot \angle P_1$

c
$$\left.\begin{array}{l}\text{In } \triangle BMP \text{ is } BM = MP \text{, dus } \angle B = \angle P_2 \text{ (basishoeken).} \\ \angle M_2 = \angle B + \angle P_2 \text{ (zie opgave 62)}\end{array}\right\} \angle M_2 = 2 \cdot \angle P_2$$

d $\angle M_{12} = \angle M_1 + \angle M_2 = 2 \cdot \angle P_1 + 2 \cdot \angle P_2 = 2 \cdot (\angle P_1 + \angle P_2) = 2 \cdot \angle P_{12}$

bladzijde 76

64
$$\left.\begin{array}{l}\text{In figuur 2.70b is } \angle P_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle M_1. \\ \text{In figuur 2.70c is } \angle Q_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle M_1.\end{array}\right\} \angle P_1 = \angle Q_1$$

bladzijde 77

65 **a** $\angle A_1 = \angle B_1$, $\angle B_2 = \angle C_2$, $\angle C_1 = \angle D_1$ en $\angle D_2 = \angle A_2$.

b $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle B_1 + \angle B_2 + \angle C_1 + \angle C_2 + \angle D_1 + \angle D_2 = 360°$

c Uit de vragen a en b volgt $\angle B_1 + \angle D_2 + \angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2 = 360°$

$\angle B_1 + \angle B_1 + \angle B_2 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_1 + \angle D_2 + \angle D_2 = 360°$

$2 \cdot \angle B_1 + 2 \cdot \angle B_2 + 2 \cdot \angle D_1 + 2 \cdot \angle D_2 = 360°$

d Uit vraag c volgt $\angle B_1 + \angle B_2 + \angle D_1 + \angle D_2 = 180°$

$\angle B_{12} + \angle D_{12} = 180°\ldots$ (1)

$\angle A_{12} + \angle B_{12} + \angle C_{12} + \angle D_{12} = 360°$ (hoekensom vierhoek), dus

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_{12} + \angle C_{12} + \angle B_{12} + \angle D_{12} = 360° \\ \angle B_{12} + \angle D_{12} = 180° \end{array}\right\} \angle A_{12} + \angle C_{12} = 180° \ldots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dat van een koordenvierhoek de overstaande hoeken samen 180° zijn.

66 a $\angle M_1 = 2 \cdot 38° = 76°$ (omtrekshoek)
b $\angle B = 180° - 102° = 78°$ (koordenvierhoek)
c $\angle D = 180° - 62° - 74° = 44°$ (hoekensom driehoek)
$\angle A = \angle D = 44°$ (gelijke omtrekshoeken)
d $\angle C_2 = 180° - 68° = 112°$ (koordenvierhoek)
$\angle C_1 = 180° - 112° = 68°$ (gestrekte hoek)

67 **a** $\angle P_1$ en $\angle Q_1$ zijn omtrekshoeken die beide op de boog RS staan, dus $\angle P_1 = \angle Q_1$ (gelijke omtrekshoeken).

b $$\left.\begin{array}{l} \angle P_1 = \angle Q_1 \text{ (zie a)} \\ \angle T_1 = \angle T_2 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \triangle PTS \backsim \triangle QTR$$

c Dus

PT	TS
QT	TR

is een verhoudingstabel, dus $PT \cdot RT = QT \cdot ST$.

68 **a** $$\left.\begin{array}{l} \angle A_1 = \angle E_1 \text{ (gelijke omtrekshoeken)} \\ \angle C \text{ (in } \triangle ACD) = \angle C \text{ (in } \triangle BCE) \end{array}\right\} \triangle ADC \backsim \triangle EBC$$

b $\triangle ADC \backsim \triangle EBC$, dus

AC	DC
EC	BC

is een verhoudingstabel, dus $AC \cdot BC = CE \cdot CD$.

69 $\angle D_1 = 180° - 102° = 78°$ (koordenvierhoek)
$\angle A_2 = 180° - 115° = 65°$ (koordenvierhoek)
$\angle A_1 = 180° - 65° = 115°$ (gestrekte hoek)
$\angle T = 180° - 65° - 78° = 37°$ (hoekensom driehoek)

bladzijde 78

70 $\angle B = \angle C_2 = 72°$ (Z-hoeken)
$\angle D = 180° - 72° = 108°$ (koordenvierhoek)

71 $\angle B_1 = \angle E_1 = 30°$ (gelijke omtrekshoeken)
In $\triangle BDF$ is $\angle D_2 = 180° - 33° - 30° = 117°$ (hoekensom driehoek)
$\angle D_1 = 180° - 117° = 63°$ (gestrekte hoek)
$\angle A_1 = 180° - 63° = 117°$ (koordenvierhoek)

72 $$\left.\begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180° \\ AM = CM, \text{ dus } \angle A = \angle C_1 \\ BM = CM, \text{ dus } \angle B = \angle C_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_{12} = 180° \\ \text{dus } 2 \cdot \angle C_{12} = 180° \\ \text{dus } \angle C_{12} = 90° \end{array}$$

bladzijde 79

73 $AM = BM$, dus $\angle A = \angle B_1 = 38°$.
AC is een middellijn van de cirkel, dus $\angle B_{12} = 90°$ (Thales), dus $\angle B_2 = 90° - 38° = 52°$.
In $\triangle ABC$ is $\angle C = 180° - 90° - 38° = 52°$ (hoekensom driehoek).

74 $\angle C_2 = 180° - 90° - 59° = 31°$ (hoekensom driehoek)
AB is een middellijn van de cirkel, dus $\angle C_{12} = 90°$ (Thales), dus $\angle C_1 = 90° - 31° = 59°$.
$\angle M_1 = 2 \cdot 59° = 118°$ (omtrekshoek)
$\angle M_2 = 180° - 118° = 62°$ (gestrekte hoek)

75 AD is een middellijn van de cirkel, dus $\angle B_1 = 90°$ (Thales).
$\angle B_2 = \angle A_1 = 28°$ (gelijke omtrekshoeken)
Dus $\angle B_{12} = 90° + 28° = 118°$.
AD is een middellijn van de cirkel, dus $\angle C_2 = 90°$ (Thales).
$\angle C_1 = \angle D_1 = 33°$ (gelijke omtrekshoeken)
Dus $\angle C_{12} = 33° + 90° = 123°$.

2.6 Vermoedens met GeoGebra

bladzijde 80

76 **a** *
b De oppervlaktes van de zes driehoeken zijn gelijk.
c De oppervlaktes van de zes driehoeken zijn steeds gelijk.
d Vermoeden: de zwaartelijnen van een driehoek verdelen de driehoek in zes driehoeken met gelijke oppervlakte.

77 **a,b** *
c De lijnen gaan door de hoekpunten van $\triangle ABC$.
d De lijnen gaan steeds door de hoekpunten van $\triangle ABC$.
e De zwaartelijnen van een driehoek en de (verlengde) zwaartelijnen van zijn middendriehoek vallen samen.
f • Een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden is een paralellogram.

$$\left.\begin{array}{l} DF \text{ is een middenparallel, dus } DF \parallel BE \\ EF \text{ is een middenparallel, dus } EF \parallel BD \end{array}\right\} \text{dus } BDFE \text{ is een paralelllogram}$$

• In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.
In $BDFE$ zijn BF en DE de diagonalen, dus BF gaat door het midden van DE.
• F is het midden van AC, dus BF is zwaartelijn van $\triangle ABC$.
In $\triangle DEF$ gaat de zwaartelijn uit F door het midden van DE.
Dus de zwaartelijnen van een driehoek en de (verlengde) zwaartelijnen van zijn middendriehoek vallen samen.

g Het zwaartepunt van een driehoek valt samen met het zwaartepunt van zijn middendriehoek.

bladzijde 81

78 **a,b,c,d** *
e De cirkel gaat ook door C.
f De cirkel gaat steeds door C.
g Vermoeden: vierhoek $CFDE$ is een koordenvierhoek.
h AB is een middellijn van een cirkel, dus $\angle D = 90°$ (Thales).
i AC is een middellijn van een cirkel, dus in $\triangle ACE$ is $\angle E = 90°$ (Thales).
BC is een middellijn van een cirkel, dus in $\triangle BCF$ is $\angle F = 90°$ (Thales).
Uit bovenstaande volgt dat in vierhoek $CFDE$ geldt $\angle D = 90°$, $\angle E = 90°$ en $\angle F = 90°$.
Dus in vierhoek $CFDE$ is $\angle C = 360° - 90° - 90° - 90° = 90°$ (hoekensom vierhoek).
Vierhoek $CFDE$ heeft vier rechte hoeken, dus $CFDE$ is een rechthoek.
Van vierhoek $CFDE$ zijn de overstaande hoeken samen 180°, dus $CFDE$ is een koordenvierhoek.
Dus de cirkel door D, E en F gaat ook door C.

79 **a,b,c,d,f** *

e MP is een middellijn van c_2, dus in $\triangle MPQ$ is $\angle Q = 90°$ (Thales).
Dus n staat loodrecht op de straal MQ van c_1, dus n is raaklijn door P aan c_1.

Gemengde opgaven

bladzijde 82

1 **a** $6 \cdot (x+5) = 8 \cdot 1$
$6x + 30 = 8$
$6x = -22$
$x = \frac{-22}{6} = \frac{-11}{3} = -3\frac{2}{3}$

b $5 \cdot (2x+1) = 3 \cdot (x-3)$
$10x + 5 = 3x - 9$
$7x = -14$
$x = -2$

c $(x+7)(x-1) = (x-3)(x+3)$
$x^2 - x + 7x - 7 = x^2 - 9$
$6x = -2$
$x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

2 $\left.\begin{array}{l}\angle A \text{ (in } \triangle ABS) = \angle C \text{ (in } \triangle CDS) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B \text{ (in } \triangle ABS) = \angle D \text{ (in } \triangle CDS) \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle ABS \backsim \triangle CDS$

$\triangle ABS$	AB	BS	AS	geeft	6	BS	AS
$\triangle CDS$	CD	DS	CS		4	2	3

$AS = \frac{3 \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

$BS = \frac{2 \cdot 6}{4} = \frac{12}{4} = 3$

3 $\left.\begin{array}{l}\angle C \text{ (in } \triangle CDS) = \angle B \text{ (F-hoeken)} \\ \angle S \text{ (in } \triangle CDS) = \angle S \text{ (in } \triangle ABS)\end{array}\right\} \triangle CDS \backsim \triangle BAS$

$\triangle CDS$	CD	DS	CS	geeft	4	x	8
$\triangle BAS$	BA	AS	BS		6	$x+5$	BS

$\leftarrow$ Stel $DS = x$, dan is $AS = x + 5$.

$BS = \frac{6 \cdot 8}{4} = \frac{48}{4} = 12$, dus $BC = 12 - 8 = 4$.
$6x = 4(x+5)$
$6x = 4x + 20$
$2x = 20$
$x = 10$, dus $DS = 10$

4 **a** In $\triangle BEF$ is $\angle E_1 = 180° - 90° - \angle F_1 = 90° - \angle F_1$ (hoekensom driehoek).
In $\triangle CDF$ is $\angle C = 180° - 90° - \angle F_1 = 90° - \angle F_1$ (hoekensom driehoek).
Dus $\angle E_1 = \angle C$.
$\angle F_2 = 90° - \angle F_1$ (rechte hoek)
Dus $\angle E_1 = \angle F_2$.

b $\left.\begin{array}{l}\angle B \text{ (in } \triangle BEF) = \angle D \ (= 90°) \\ \angle E_1 \text{ (in } \triangle BEF) = \angle C\end{array}\right\} \triangle BEF \backsim \triangle DCF$

$\left.\begin{array}{l}\angle B \text{ (in } \triangle BEF) = \angle B \text{ (in } \triangle ABF) \ (= 90°) \\ \angle E_1 = \angle F_2\end{array}\right\} \triangle BEF \backsim \triangle BFA$

$\left.\begin{array}{l}\angle B \text{ (in } \triangle BEF) = \angle F_{12} \ (= 90°) \\ \angle E_1 \text{ (in } \triangle BEF) = \angle E_1 \text{ (in } \triangle AEF)\end{array}\right\} \triangle BEF \backsim \triangle FEA$

c De stelling van Pythagoras in $\triangle CDF$ geeft $CF^2 = CD^2 + DF^2 = 2{,}5^2 + 6^2 = 42{,}25$, dus $CF = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BEF \backsim \triangle DCF \\ \triangle BEF \backsim \triangle FEA \end{array}\right\} \triangle DCF \backsim \triangle FEA$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \triangle DCF & DC & CF & DF \\ \hline \triangle FEA & FE & EA & FA \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} 2{,}5 & 6{,}5 & 6 \\ \hline 3 & AE & AF \end{array}$$

$$AF = \frac{3 \cdot 6}{2{,}5} = 7{,}2$$

$\triangle BEF \backsim \triangle DCF$

$$\begin{array}{c|c|c|c} \triangle BEF & BE & EF & BF \\ \hline \triangle DCF & DC & CF & DF \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c} BE & 3 & BF \\ \hline 2{,}5 & 6{,}5 & 6 \end{array}$$

$$BF = \frac{6 \cdot 3}{6{,}5} \approx 2{,}8$$

Dus $BC \approx 6{,}5 - 2{,}8 = 3{,}7$.

5

$$\left.\begin{array}{l} \angle D \text{ (in } \triangle DEF) = \angle A \text{ (F-hoeken)} \\ \angle E \text{ (in } \triangle DEF) = \angle E \text{ (in } \triangle AEG) \end{array}\right\} \triangle DEF \backsim \triangle AEG$$

$$\begin{array}{c|c} DE & DF \\ \hline AE & AG \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 6 & DF \\ \hline 10{,}8 & 8{,}4 \end{array}$$

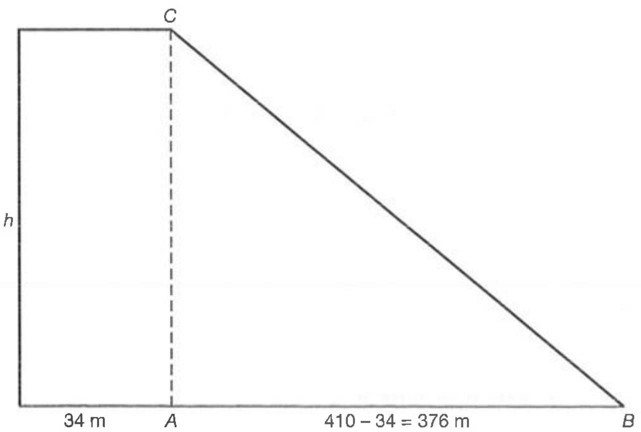
$$DF = \frac{6 \cdot 8{,}4}{10{,}8} \approx 4{,}67$$

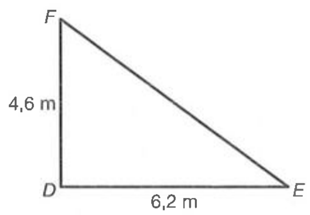
$$\left.\begin{array}{l} \angle B \text{ (in } \triangle BGH) = \angle A \text{ (in } \triangle AEG) \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle G \text{ (in } \triangle BGH) = \angle G \text{ (in } \triangle AEG) \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \triangle BGH \backsim \triangle AGE$$

$$\begin{array}{c|c} BG & BH \\ \hline AG & AE \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 3{,}2 & BH \\ \hline 8{,}4 & 10{,}8 \end{array}$$

$$BH = \frac{3{,}2 \cdot 10{,}8}{8{,}4} \approx 4{,}11$$

6





Zie de figuren hierboven.

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle D \ (= 90^\circ) \\ \angle B = \angle E \text{ (F-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DEF$$

$$\begin{array}{c|c} AB & AC \\ \hline DE & DF \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 376 & AC \\ \hline 6{,}2 & 4{,}6 \end{array}$$

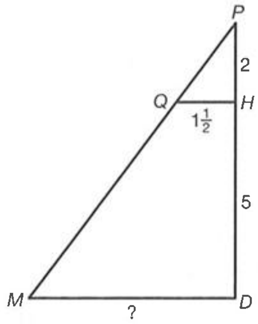
$$AC = \frac{4{,}6 \cdot 376}{6{,}2} \approx 279$$

Dus de hoogte h van de rots is 279 meter.

7 **a** $\left.\begin{array}{l}\angle D = \angle H\ (= 90^\circ) \\ \angle P \text{ (in } \triangle DMP) = \angle P \text{ (in } \triangle HPQ)\end{array}\right\} \triangle DMP \backsim \triangle HQP$

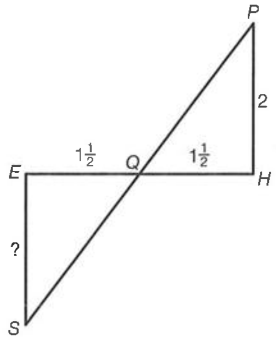
$$\begin{array}{c|c} DM & DP \\ \hline HQ & HP \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} DM & 7 \\ \hline 1\frac{1}{2} & 2 \end{array}$$

$$DM = \frac{7 \cdot 1\frac{1}{2}}{2} = 5\tfrac{1}{4}$$



$\left.\begin{array}{l}\angle E = \angle H\ (= 90^\circ) \\ \angle S = \angle P \text{ (Z-hoeken)}\end{array}\right\} \triangle EQS \backsim \triangle HQP$

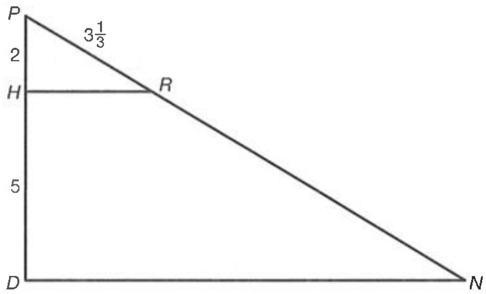
$$\begin{array}{c|c} EQ & ES \\ \hline HQ & HP \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 1\frac{1}{2} & ES \\ \hline 1\frac{1}{2} & 2 \end{array}, \text{ dus } ES = 2.$$



b $\left.\begin{array}{l}\angle D = \angle H\ (= 90^\circ) \\ \angle P \text{ (in } \triangle DNP) = \angle P \text{ (in } \triangle HPR)\end{array}\right\} \triangle DNP \backsim \triangle HRP$

$$\begin{array}{c|c} DP & NP \\ \hline HP & RP \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 7 & NP \\ \hline 2 & 3\frac{1}{3} \end{array}$$

$$PN = \frac{7 \cdot 3\frac{1}{3}}{2} = 11\tfrac{2}{3}$$

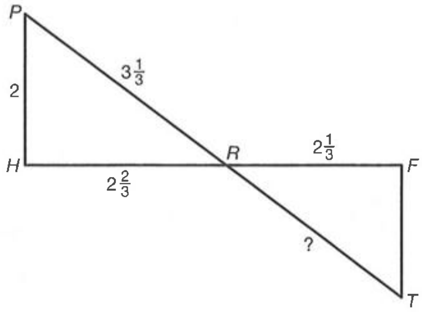


De stelling van Pythagoras in $\triangle EHF$ geeft
$FH^2 = EF^2 + EH^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, dus $FH = \sqrt{25} = 5$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle HPR$ geeft
$HR^2 = PR^2 - PH^2 = (3\frac{1}{3})^2 - 2^2 = 7\frac{1}{9}$, dus $HR = \sqrt{7\frac{1}{9}} = 2\frac{2}{3}$.
$FR = HF - HR = 5 - 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$
Zie de figuur hiernaast.

$\left.\begin{array}{l}\angle H = \angle F\ (= 90^\circ) \\ \angle R \text{ (in } \triangle HPR) = \angle R \text{ (in } \triangle FRT)\end{array}\right\} \triangle HPR \backsim \triangle FTR$

$$\begin{array}{c|c} HR & PR \\ \hline FR & TR \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 2\frac{2}{3} & 3\frac{1}{3} \\ \hline 2\frac{1}{3} & RT \end{array}$$

$$RT = \frac{2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} = 2\tfrac{11}{12}$$



8 MN is middenparallel, dus $MN = \frac{1}{2}BC = 8$.
CM is zwaartelijn, dus $AM = \frac{1}{2}AB = 6$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft
$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 16^2 - 12^2 = 112$, dus $AC = \sqrt{112} = 10{,}583...$
BN is zwaartelijn, dus $AN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 10{,}583... = 5{,}291...$
De stelling van Pythagoras in $\triangle ACM$ geeft
$CM^2 = AM^2 + AC^2 = 36 + 112 = 148$, dus $CM = \sqrt{148} = 12{,}165...$
Z is zwaartepunt, dus $MZ = \frac{1}{3}CM = \frac{1}{3} \cdot 12{,}165... \approx 4{,}06$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABN$ geeft
$BN^2 = AB^2 + AN^2 = 12^2 + 5{,}291...^2 = 172$, dus $BN = \sqrt{172} = 13{,}114...$
Z is zwaartepunt, dus $NZ = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3} \cdot 13{,}114... \approx 4{,}37$.

9 $\left.\begin{array}{l} AC \,//\, DE\text{, dus } \angle C = \angle E \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle B_2 = 180^\circ - \angle A - \angle C \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \angle B_2 = 180^\circ - \angle A - \angle E$

$\left.\begin{array}{l} \angle B_2 = 180^\circ - \angle A - \angle E \\ \angle B_2 = 180^\circ - \angle B_3 \text{ (gestrekte hoek)} \end{array}\right\} \angle B_3 = \angle A + \angle E$

10 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle C_{12} = 180^\circ - \angle A_{12} \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle C_{12} = 180^\circ - \angle C_3 \text{ (gestrekte hoek)} \end{array}\right\} \angle A_{12} = \angle C_3$

b $\left.\begin{array}{l} AB = BD\text{, dus } \angle D_1 = \angle A_{12} \\ \angle D_1 = \angle C_2 \text{ (gelijke omtrekshoeken)} \end{array}\right\} \angle A_{12} = \angle C_2$

$\angle A_{12} = \angle C_3$ (zie vraag a) en $\angle A_{12} = \angle C_2$, dus $\angle C_2 = \angle C_3$.

Diagnostische toets

bladzijde 86

1 **a** $\begin{array}{c|c} 7 & 11 \\ \hline 2 & x \end{array}$ geeft $x = \dfrac{2 \cdot 11}{7} \approx 3{,}1$

$\begin{array}{c|c} 7 & 3 \\ \hline 2 & y \end{array}$ geeft $y = \dfrac{2 \cdot 3}{7} \approx 0{,}9$

b $5 \cdot (2x + 3) = 4 \cdot (x - 1)$
$10x + 15 = 4x - 4$
$6x = -19$
$x = \frac{-19}{6} \approx -3{,}2$

c $3 \cdot y = 1 \cdot (4 - y)$
$3y = 4 - y$
$4y = 4$
$y = 1$

2 $\begin{array}{c|c|c} 4{,}2 & a & 5{,}5 \\ \hline 5{,}1 & 7{,}5 & b \end{array}$ is een verhoudingstabel.

Splitsen geeft

$\begin{array}{c|c} 4{,}2 & a \\ \hline 5{,}1 & 7{,}5 \end{array}$, dus $a = \dfrac{4{,}2 \cdot 7{,}5}{5{,}1} \approx 6{,}2$ en

$\begin{array}{c|c} 4{,}2 & 5{,}5 \\ \hline 5{,}1 & b \end{array}$, dus $b = \dfrac{5{,}1 \cdot 5{,}5}{4{,}2} \approx 6{,}7$.

3 **a** $\triangle ABC \backsim \triangle EBD$

b $\triangle ABC \backsim \triangle EBD$, dus $\begin{array}{c|c|c|c} \triangle ABC & AB & BC & AC \\ \hline \triangle EBD & EB & BD & ED \end{array}$

$\begin{array}{c|c|c} 10 & 8 & 6 \\ \hline 6{,}5 & BD & ED \end{array}$ $\boxed{\begin{array}{l} AB^2 = AC^2 + BC^2 \\ AB^2 = 36 + 64 = 10 \\ AB = \sqrt{100} = 10 \end{array}}$

Je krijgt $ED = \dfrac{6 \cdot 6{,}5}{10} = 3{,}9$ en $BD = \dfrac{8 \cdot 6{,}5}{10} = 5{,}2$.

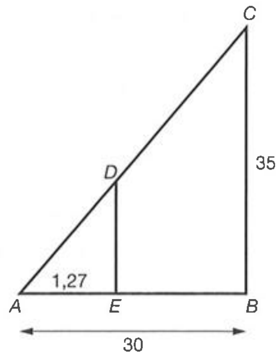
4 $AE = 127$ cm $= 1{,}27$ m
De lengte van Coen is DE.

$$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle E\ (= 90^\circ)\\ \angle A\ (\text{in } \triangle ABC) = \angle A\ (\text{in } \triangle ADE)\end{array}\right\}\triangle ABC \backsim \triangle AED$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}\triangle ABC & AB & BC & AC\\ \hline \triangle AED & AE & ED & AD\end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c}30 & 35 & AC\\ \hline 1{,}27 & ED & AD\end{array}.$$

$$ED = \frac{1{,}27 \cdot 35}{30} \approx 1{,}48$$

Dus de lengte van Coen is 148 cm.



5
$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D\ (\text{in } \triangle DPQ)\ (\text{F-hoeken})\\ \angle P\ (\text{in } \triangle ABP) = \angle P\ (\text{in } \triangle DPQ)\end{array}\right\}\triangle ABP \backsim \triangle DQP$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}\triangle ABP & AB & BP & AP\\ \hline \triangle DQP & DQ & QP & DP\end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c|c}6 & BP & 5{,}5\\ \hline DQ & QP & 1{,}5\end{array}$$

$$DQ = \frac{6 \cdot 1{,}5}{5{,}5} \approx 1{,}6$$

6 **a**
$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D\ (\text{in } \triangle BDE)\ (\text{F-hoeken})\\ \angle B\ (\text{in } \triangle ABC) = \angle B\ (\text{in } \triangle BDE)\end{array}\right\}\triangle ABC \backsim \triangle DBE$$

$$\begin{array}{c|c}AC & BC\\ \hline DE & BE\end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c}5{,}4 & x + 4{,}8\\ \hline 1{,}8 & x\end{array}$$

$\boxed{\text{Stel } BE = x\text{, dan is } BC = x + 4{,}8.}$

$5{,}4x = 1{,}8(x + 4{,}8)$
$5{,}4x = 1{,}8x + 8{,}64$
$3{,}6x = 8{,}64$
$x = \frac{8{,}64}{3{,}6} = 2{,}4$, dus $BE = 2{,}4$

b $\triangle ABC \backsim \triangle DBE$, dus $\begin{array}{c|c}AB & AC\\ \hline DB & DE\end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c}AB & 5{,}4\\ \hline 2{,}6 & 1{,}8\end{array}$.

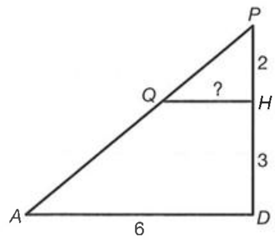
$$AB = \frac{2{,}6 \cdot 5{,}4}{1{,}8} = 7{,}8$$

$AD = AB - BD = 7{,}8 - 2{,}6 = 5{,}2$

7 **a**
$$\left.\begin{array}{l}\angle D = \angle H\ (= 90^\circ)\\ \angle P\ (\text{in } \triangle ADP) = \angle P\ (\text{in } \triangle HPQ)\end{array}\right\}\triangle ADP \backsim \triangle QHP$$

$$\begin{array}{c|c}AD & DP\\ \hline QH & HP\end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c}6 & 5\\ \hline HQ & 2\end{array}$$

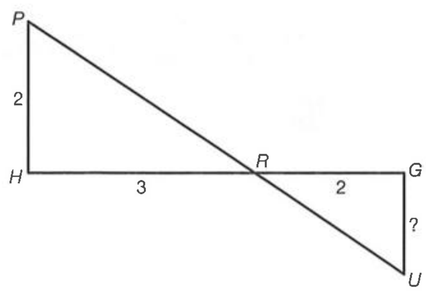
$$HQ = \frac{2 \cdot 6}{5} = \frac{12}{5} = 2\tfrac{2}{5}$$



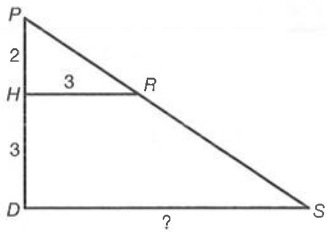
b
$$\left.\begin{array}{l}\angle H = \angle G\ (= 90^\circ)\\ \angle P = \angle U\ (\text{Z-hoeken})\end{array}\right\}\triangle HPR \backsim \triangle GUR$$

$$\begin{array}{c|c}HP & HR\\ \hline GU & GR\end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c}2 & 3\\ \hline GU & 2\end{array}$$

$$GU = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}$$



c Eerst DS berekenen.



$$\left.\begin{array}{l}\angle D = \angle H (= 90°)\\ \angle P \text{ (in } \triangle DPS) = \angle P \text{ (in } \triangle HPR)\end{array}\right\} \triangle DPS \backsim \triangle HPR$$

$$\begin{array}{c|c} DP & DS \\ \hline HP & HR \end{array} \text{ geeft } \begin{array}{c|c} 5 & DS \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

$$DS = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\tfrac{1}{2}$$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADS$ geeft
$AS^2 = AD^2 + DS^2 = 6^2 + (7\frac{1}{2})^2 = 92\frac{1}{4}$, dus $AS = \sqrt{92\frac{1}{4}} \approx 9{,}6$.

bladzijde 87

8 **a** $\left.\begin{array}{l}\text{In } \triangle BEF \text{ is } \angle B_2 = 180° - 90° - \angle E = 90° - \angle E \text{ (hoekensom driehoek).}\\ \angle E = \angle C_3 \text{ (gelijkbenige driehoek)}\end{array}\right\} \angle B_2 = 90° - \angle C_3$

b $\left.\begin{array}{l}\text{In } \triangle ABC \text{ is } \angle B_1 = 180° - 90° - \angle C_1 = 90° - \angle C_1 \text{ (hoekensom driehoek).}\\ \angle C_3 = \angle C_1 \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\} \angle B_1 = 90° - \angle C_3$

c $\left.\begin{array}{l}\angle B_2 = 90° - \angle C_3 \text{ (zie vraag a)}\\ \angle B_1 = 90° - \angle C_3 \text{ (zie vraag b)}\end{array}\right\} \angle B_1 = \angle B_2$

9 **a** KM is een middenparallel van $\triangle PQR$, dus $KM = \frac{1}{2}QR = 4{,}2$.
b $KQ = KP = 5{,}6$
De stelling van Pythagoras in $\triangle KMQ$ geeft
$MQ^2 = KM^2 + KQ^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 49$, dus $MQ = \sqrt{49} = 7$.
LP, MQ en KR zijn zwaartelijnen die door punt Z gaan, dus Z is zwaartepunt,
dus $QZ = \frac{2}{3}MQ = \frac{2}{3} \cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$.
c $LQ = LR = 4{,}2$
$PQ = 2 \cdot 5{,}6 = 11{,}2$
De stelling van Pythagoras in $\triangle LPQ$ geeft
$LP^2 = LQ^2 + PQ^2 = 4{,}2^2 + 11{,}2^2 = 143{,}08$, dus $LP = \sqrt{143{,}08} = 11{,}961....$
Z is zwaartepunt, dus $LZ = \frac{1}{3}LP = \frac{1}{3} \cdot 11{,}961... \approx 4{,}0$.

10 **a** $\angle P_{12} = \frac{1}{2} \cdot 132° = 66°$ (omtrekshoek)
$\angle P_2 = 66° - 32° = 34°$
b $MP = MS$, dus $\angle S_1 = \angle P_2 = 34°$.
$\angle M_3 = 180° - 34° - 34° = 112°$ (hoekensom driehoek)
c $\angle R = 180° - 66° = 114°$ (koordenvierhoek)

11 $\angle B_1 = \angle D_1 = 28°$ (gelijke omtrekshoeken)
AB is een middellijn van de cirkel, dus $\angle C_2 = 90°$ (Thales).
In $\triangle ABC$ is $\angle A_{12} = 180° - 90° - 28 = 62°$ (hoekensom driehoek).
Dus $\angle A_2 = 62° - 21° = 41°$.

Herhaling

bladzijde 88

1 **a** $x = \dfrac{3{,}5 \cdot 9}{6} \approx 5{,}3$
b $x = \dfrac{5 \cdot 9}{2{,}1} \approx 21{,}4$

c $\begin{array}{c|c} 3 & 1{,}7 \\ \hline x & 4{,}2 \end{array}$ geeft $x = \dfrac{3 \cdot 4{,}2}{1{,}7} \approx 7{,}4$

$\begin{array}{c|c} 1{,}7 & 5 \\ \hline 4{,}2 & y \end{array}$ geeft $y = \dfrac{5 \cdot 4{,}2}{1{,}7} \approx 12{,}4$

2 **a** $7 \cdot (3x - 2) = 4 \cdot (x + 4)$
$21x - 14 = 4x + 16$
$17x = 30$
$x = \frac{30}{17} \approx 1{,}8$

b $\begin{array}{c|c} 3 & 5 + x \\ \hline 11 & 8x - 2 \end{array}$ geeft $3 \cdot (8x - 2) = 11 \cdot (5 + x)$
$24x - 6 = 55 + 11x$
$13x = 61$
$x = \frac{61}{13} \approx 4{,}7$

$\begin{array}{c|c} 3 & \frac{61}{13} \\ \hline 11 & y \end{array}$ geeft $y = \dfrac{11 \cdot \frac{61}{13}}{3} \approx 17{,}2$

3 Splitsen geeft

$\begin{array}{c|c} 13 & 7 \\ \hline 9 & a \end{array}$, dus $a = \dfrac{7 \cdot 9}{13} \approx 4{,}8$ en

$\begin{array}{c|c} 13 & 11 \\ \hline 9 & b \end{array}$, dus $b = \dfrac{9 \cdot 11}{13} \approx 7{,}6$.

4 **a** $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 25 + 144 = 169$, dus $AC = \sqrt{169} = 13$.
b In $\triangle CDE$ is $\angle E_1 = 180^\circ - 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle C$ (hoekensom driehoek).
In $\triangle ABC$ is $\angle A = 180^\circ - 90^\circ - \angle C = 90^\circ - \angle C$ (hoekensom driehoek).
Dus $\angle E_1 = \angle A$.
c $\triangle ABC \backsim \triangle EDC$, dus $\begin{array}{c|c|c|c} \triangle ABC & AB & BC & AC \\ \hline \triangle EDC & ED & DC & EC \end{array}$

d Invullen van de verhoudingstabel geeft $\begin{array}{c|c|c} 5 & 12 & 13 \\ \hline ED & DC & 5 \end{array}$, dus

$ED = \dfrac{5 \cdot 5}{13} \approx 1{,}9$ en $DC = \dfrac{5 \cdot 12}{13} \approx 4{,}6$.

5 **a** De driehoeken I en II zijn gelijkvormig.

$\begin{array}{c|c} 4{,}20 & 12{,}40 \\ \hline ? & 16{,}65 \end{array}$ geeft $? = \dfrac{4{,}20 \cdot 16{,}65}{12{,}40} \approx 5{,}64$

Dus de lengte van de schaduw van mast II is 564 cm.

b De driehoeken I en III zijn gelijkvormig.

$\begin{array}{c|c} 4{,}20 & 12{,}40 \\ \hline 4{,}82 & ? \end{array}$ geeft $? = \dfrac{4{,}82 \cdot 12{,}40}{4{,}20} \approx 14{,}23$

Dus mast III is 14,23 meter.

6 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle A = D_1 \text{ (F-hoeken)} \\ \angle B = E_1 \text{ (F-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle DEC$

b $\begin{array}{c|c} AB & AC \\ \hline DE & DC \end{array}$ invullen geeft $\begin{array}{c|c} 12 & 10 \\ \hline DE & 3 \end{array}$, dus $DE = \frac{3 \cdot 12}{10} = 3{,}6$.

7 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle P = T \text{(Z-hoeken)} \\ \angle R = S \text{(Z-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle PQR \backsim \triangle TQS$

b $\triangle PQR \backsim \triangle TQS$, dus $\begin{array}{c|c} PR & QR \\ \hline TS & QS \end{array}$ is een verhoudingstabel.

Invullen geeft $\begin{array}{c|c} 5 & 6 \\ \hline ST & 4 \end{array}$, dus $ST = \frac{{}^{2}\cancel{4} \cdot 5}{{}^{3}\cancel{6}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

8 $4{,}5x = 3{,}2(x + 2{,}5)$
$4{,}5x = 3{,}2x + 8$
$1{,}3x = 8$
$x = \frac{8}{1{,}3} \approx 6{,}2$
Dus $CD \approx 6{,}2$.

9 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle A \text{ (in } \triangle ADQ) = P \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle D = \angle C \text{ (in } \triangle CPQ) \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle ADQ \backsim \triangle PCQ$

$\begin{array}{c|c} AD & DQ \\ \hline PC & CQ \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 1{,}8 & 2{,}3 \\ \hline CP & 2{,}9 \end{array} \longleftarrow \boxed{DQ = 5{,}2 - 2{,}9 = 2{,}3}$

$CP = \frac{1{,}8 \cdot 2{,}9}{2{,}3} \approx 2{,}3$

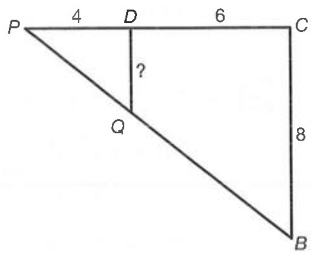
b $\left.\begin{array}{l} \angle P \text{ (in } \triangle ABP) = P \text{ (in } \triangle CPQ) \\ \angle B = \angle C \text{ (in } \triangle CPQ) \text{ (F-hoeken)} \end{array}\right\} \triangle ABP \backsim \triangle QCP$

$\begin{array}{c|c} AB & AP \\ \hline QC & QP \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 5{,}2 & 8{,}1 \\ \hline 2{,}9 & PQ \end{array}$

$PQ = \frac{8{,}1 \cdot 2{,}9}{5{,}2} \approx 4{,}5$

bladzijde 90

10 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle P \text{ (in } \triangle DPQ) = P \text{ (in } \triangle BCP) \\ \angle D = \angle C \text{ } (= 90°) \end{array}\right\} \triangle PQD \backsim \triangle PBC$

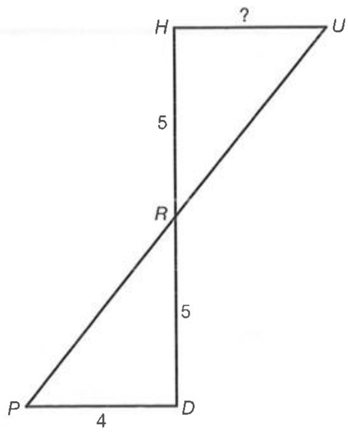


$\begin{array}{c|c} PD & QD \\ \hline PC & BC \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} 4 & DQ \\ \hline 10 & 8 \end{array}$

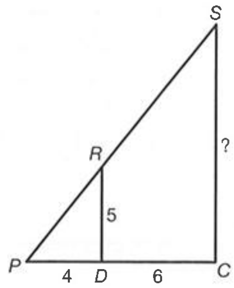
$DQ = \frac{4 \cdot 8}{10} = 3{,}2$

b $\left.\begin{array}{l} \angle U = \angle P \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle H = \angle D \text{ } (= 90°) \end{array}\right\} \triangle UHR \backsim \triangle PDR$

$\begin{array}{c|c} UH & HR \\ \hline PD & DR \end{array}$ geeft $\begin{array}{c|c} HU & 5 \\ \hline 4 & 5 \end{array}$, dus $HU = 4$.



c $\angle P$ (in $\triangle DPR$) $= \angle P$ (in $\triangle CPS$) and $\angle D = \angle C$ ($= 90°$) $\Big\}$ $\triangle DPR \backsim \triangle CPS$



DP	DR		4	5
CP	CS	geeft	10	CS

$CS = \dfrac{5 \cdot 10}{4} = 12{,}5$

$GS = CS - CG = 12{,}5 - 10 = 2{,}5$

De stelling van Pythagoras in $\triangle BCS$ geeft
$BS^2 = BC^2 + CS^2 = 8^2 + 12{,}5^2 = 220{,}25$, dus $BS = \sqrt{220{,}25} \approx 14{,}84$.

11 **a** In $\triangle ABF$ is $\angle A = 180° - 90° - \angle F_2 = 90° - \angle F_2$ (hoekensom driehoek).
b In $\triangle BCE$ is $\angle C = 180° - 90° - \angle E = 90° - \angle E$ (hoekensom driehoek).

c $\angle F_2 = \angle F_1$ (overstaande hoeken) and $\angle E = \angle F_1$ (gelijkbenige driehoek) $\Big\}$ $\angle F_2 = \angle E$

d $\angle A = 90° - \angle F_2$ en $\angle F_2 = \angle E$, dus $\angle A = 90° - \angle E$ and $\angle C = 90° - \angle E$ $\Big\}$ $\angle A = \angle C$

12 **a** $\angle D_1 = \angle C_2$ (gelijkbenige driehoek) and $\angle C_2 = \angle C_1$ (overstaande hoeken) $\Big\}$ $\angle D_1 = \angle C_1$

b $\angle D_1 = \angle C_1$ (zie vraag a) and $\angle D_1 = \angle A_1$ (Z-hoeken) $\Big\}$ $\angle A_1 = \angle C_1$

13 **a** DE is middenparallel, dus $AB = 2DE = 11$.

bladzijde 91

b Twee zwaartelijnen verdelen elkaar in stukken die zich verhouden als 1 : 2.
$DZ : AZ = 1 : 2$ en $AZ = 6$, dus $DZ = 6 : 2 = 3$.
c $EZ : BZ = 1 : 2$ en $EZ = 4$, dus $BZ = 2 \cdot 4 = 8$.

14 **a** BF is zwaartelijn, dus $CF = AF = 3$.
DE is middenparallel, dus $DE = \frac{1}{2}AC = 3$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ADE$ geeft $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 16 + 9 = 25$,
dus $AE = \sqrt{25} = 5$.
b Z is zwaartepunt, dus $AZ = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ en $EZ = 5 - 3\frac{1}{3} = 1\frac{2}{3}$.
c CD is zwaartelijn, dus $AB = 2AD = 8$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABF$ geeft $BF^2 = AB^2 + AF^2 = 64 + 9 = 73$,
dus $BF = \sqrt{73} = 8{,}544... \approx 8{,}54$.
Z is zwaartepunt, dus $FZ = \frac{1}{3}BF = \frac{1}{3} \cdot 8{,}544... \approx 2{,}85$.
d De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $CD^2 = AD^2 + AC^2 = 16 + 36 = 52$,
dus $CD = \sqrt{52} = 7{,}211...$
Z is zwaartepunt, dus $CZ = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} \cdot 7{,}211... \approx 4{,}81$.

15 **a** Volgens de stelling van de omtrekshoek is een omtrekshoek gelijk aan de helft van de middelpuntshoek die op dezelfde boog staat.
b Volgens de stelling van gelijke omtrekshoeken zijn omtrekshoeken die op dezelfde boog staan zijn gelijk.
c Stelling van de koordenvierhoek
Als de hoekpunten van een vierhoek op een cirkel liggen dan zijn de overstaande hoeken van die vierhoek samen 180°.
d $\angle A = \angle B = 50°$ (gelijke omtrekshoeken)
$\angle C = \angle D = 40°$ (gelijke omtrekshoeken)
$\angle M_1 = 2 \cdot \angle C = 2 \cdot 53° = 106°$ (omtrekshoek)
$\angle R = 180° - \angle P = 180° - 128° = 52°$ (koordenvierhoek)
$\angle S = 180° - \angle Q = 180° - 80° = 100°$ (koordenvierhoek)

16 **a** $\angle A_{12} = \frac{1}{2} \cdot \angle M_1 = \frac{1}{2} \cdot 140° = 70°$ (omtrekshoek)
b $\angle A_2 = \angle A_{12} - \angle A_1 = 70° - 28° = 42°$ (gelijkbenige driehoek)
$BM = AM$ (straal cirkel), dus $\angle B_2 = \angle A_2 = 42°$.
c $\angle C + \angle A_{12} = 180°$ (koordenvierhoek), dus $\angle C = 180° - \angle A_{12} = 180° - 70° = 110°$.
d $\angle D_1 = \angle A_1 = 28°$ (gelijkbenige driehoek)
$\angle M_3 = 180° - 28° - 28° = 124°$ (hoekensom driehoek)

17 **a** AB is een middellijn van de cirkel, dus in $\triangle ABC$ is $\angle C_2 = 90°$ (Thales).
b $\angle A_1 = \angle D_1 = 26°$ (gelijke omtrekshoeken)
c $\angle B_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_2 - \angle C_2 = 180° - 26° - 34° - 90° = 30°$ (hoekensom driehoek)
$\angle C_1 = \angle B_2 = 34°$ (gelijke omtrekshoeken)

Extra

bladzijde 92

1 **a**
$$\begin{array}{c|c} 40 & 25 \\ \hline 20 & b \end{array} \text{ geeft } b = \frac{20 \cdot 25}{40} = 12{,}5$$
De hoogte van het beeld is 12,5 cm.

b
$$\begin{array}{c|c} d & 25 \\ \hline 20 & 5 \end{array} \text{ geeft } d = \frac{20 \cdot 25}{5} = 100$$
De afstand van de kaars tot O is 100 cm.

c
$$\begin{array}{c|c} d & 25 \\ \hline 20 & 15 \end{array} \text{ geeft } d = \frac{20 \cdot 25}{15} \approx 33{,}3$$
De kaars staat ongeveer 33,3 cm voor O.

bladzijde 93

2 **a**
$$\begin{array}{c|c} 300 & 12 \\ \hline AB & 20 \end{array} \text{ geeft } AB = \frac{300 \cdot 20}{12} = 500$$
De lengte AB van de camera is 500 cm.

b
$$\begin{array}{c|c} 200 & 4 \\ \hline AB & 1 \end{array} \text{ geeft } AB = \frac{200 \cdot 1}{4} = 50$$
De lengte AB van de camera is 50 cm.

c
$$\begin{array}{c|c} 400 & 150 \\ \hline 30 & b \end{array} \text{ geeft } b = \frac{30 \cdot 150}{400} = 11{,}25$$
De hoogte BC van de camera is 11,25 cm.

3 **a**
$$\begin{array}{c|c} 150 & b+15 \\ \hline 25 & b \end{array} \text{ geeft } \begin{aligned} 150b &= 25(b+15) \\ 150b &= 25b + 375 \\ 125b &= 375 \\ b &= 3 \end{aligned}$$
De hoogte b van het beeld is 3 cm.

b Stel $AB = x$.

$x + 120$	28
x	4

geeft $28x = 4(x + 120)$

$28x = 4x + 480$

$24x = 480$

$x = 20$

Dus de lengte AB van de camera is 20 cm.

4 *

Wiskundige vaardigheden

bladzijde 94

1
a $58\% = \frac{58}{100} = 0{,}58$
b $31\% = \frac{31}{100} = 0{,}31$
c $8{,}2\% = \frac{8{,}2}{100} = 0{,}082$
d $0{,}3\% = \frac{0{,}3}{100} = 0{,}003$
e $89{,}3\% = \frac{89{,}3}{100} = 0{,}893$
f $0{,}07\% = \frac{0{,}07}{100} = 0{,}0007$
g $11{,}1\% = \frac{11{,}1}{100} = 0{,}111$
h $1\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

2
a $0{,}23 = \frac{23}{100} = 23\%$
b $0{,}92 = \frac{92}{100} = 92\%$
c $0{,}08 = \frac{8}{100} = 8\%$
d $0{,}0073 = \frac{73}{10\,000} = \frac{0{,}73}{100} = 0{,}73\%$
e $0{,}908 = \frac{908}{1000} = \frac{90{,}8}{100} = 90{,}8\%$
f $0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = 20\%$
g $0{,}002 = \frac{2}{1000} = \frac{0{,}2}{100} = 0{,}2\%$
h $0{,}173 = \frac{173}{1000} = \frac{17{,}3}{100} = 17{,}3\%$

3
a $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
b $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$
c $80\% = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$
d $12\frac{1}{2}\% = \dfrac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{8}$
e $6\% = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$
f $33\frac{1}{3}\% = \dfrac{33\frac{1}{3}}{100} = \frac{1}{3}$
g $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
h $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

4
a $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$
b $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$
c $\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\%$
d $\frac{3}{5} = \frac{60}{100} = 60\%$
e $\frac{1}{40} = \frac{25}{1000} = \frac{2{,}5}{100} = 2{,}5\%$
f $\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 15\%$
g $\frac{3}{1000} = \frac{0{,}3}{100} = 0{,}3\%$
h $\frac{5}{8} = \frac{625}{1000} = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\%$
i $\frac{11}{50} = \frac{22}{100} = 22\%$
j $\frac{17}{40} = \frac{425}{1000} = \frac{42{,}5}{100} = 42{,}5\%$
k $\frac{1}{80} = \frac{125}{10000} = \frac{1{,}25}{100} = 1{,}25\%$
l $\frac{137}{1000} = \frac{13{,}7}{100} = 13{,}7\%$

5
a $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$
b $0{,}11 = \frac{11}{100} = 11\%$
c $\frac{31}{50} = \frac{62}{100} = 62\%$
d $0{,}003 = \frac{3}{1000} = \frac{0{,}3}{100} = 0{,}3\%$
e $\frac{11}{125} = \frac{88}{1000} = \frac{8{,}8}{100} = 8{,}8\%$
f $0{,}098 = \frac{98}{1000} = \frac{9{,}8}{100} = 9{,}8\%$
g $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = \frac{37{,}5}{100} = 37{,}5\%$
h $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = 40\%$

bladzijde 95

6
a 6% van 830 is $0{,}06 \cdot 830 = 49{,}8$.
b 53% van 72 is $0{,}53 \cdot 72 = 38{,}16$.
c 5,3% van 750 is $0{,}053 \cdot 750 = 39{,}75$.
d 0,38% van 1200 is $0{,}0038 \cdot 1200 = 4{,}56$.
e 96% van 80 is $0{,}96 \cdot 80 = 76{,}8$.
f 2,37% van 700 is $0{,}0237 \cdot 700 = 16{,}59$.
g 11% van 20 is $0{,}11 \cdot 20 = 2{,}2$.
h 3,1% van 800 is $0{,}031 \cdot 800 = 24{,}8$.
i 0,89% van 750 is $0{,}0089 \cdot 750 = 6{,}675$.

7
a 7 van 25 is $\frac{7}{25} \times 100\% = 28\%$.
b 18 van 50 is $\frac{18}{50} \times 100\% = 36\%$.
c 900 van 1250 is $\frac{900}{1250} \times 100\% = 72\%$.
d 7 van 8 is $\frac{7}{8} \times 100\% = 87{,}5\%$.
e 1 van 3 is $\frac{1}{3} \times 100\% \approx 33{,}3\%$.
f 59 van 60 is $\frac{59}{60} \times 100\% \approx 98{,}3\%$.
g 10 van 8000 is $\frac{10}{8000} \times 100\% \approx 0{,}1\%$.
h 71 van 400 is $\frac{71}{400} \times 100\% \approx 17{,}8\%$.
i 1,38 van 2,5 is $\frac{1{,}38}{2{,}5} \times 100\% = 55{,}2\%$.

8
a $100\% + 12\% = 112\%$, dus $\times 1{,}12$.
b $100\% + 31\% = 131\%$, dus $\times 1{,}31$.
c $100\% + 8\% = 108\%$, dus $\times 1{,}08$.
d $100\% + 0{,}2\% = 100{,}2\%$, dus $\times 1{,}002$.
e $100\% + 3{,}8\% = 103{,}8\%$, dus $\times 1{,}038$.
f $100\% + 99{,}9\% = 199{,}9\%$, dus $\times 1{,}999$.
g $100\% + 0{,}08\% = 100{,}08\%$, dus $\times 1{,}0008$.
h $100\% + 1{,}03\% = 101{,}03\%$, dus $\times 1{,}0103$.

9
a $100\% - 7\% = 93\%$, dus $\times 0{,}93$.
b $100\% - 11\% = 89\%$, dus $\times 0{,}89$.
c $100\% - 48\% = 52\%$, dus $\times 0{,}52$.
d $100\% - 3\% = 97\%$, dus $\times 0{,}97$.
e $100\% - 1{,}9\% = 98{,}1\%$, dus $\times 0{,}981$.
f $100\% - 0{,}82\% = 99{,}18\%$, dus $\times 0{,}9918$.
g $100\% - 0{,}082\% = 99{,}918\%$, dus $\times 0{,}99918$.
h $100\% - 8{,}2\% = 91{,}8\%$, dus $\times 0{,}918$.

10
a $100\% - 9{,}5\% = 90{,}5\%$, dus $\times 0{,}905$.
b $100\% + 9{,}5\% = 109{,}5\%$, dus $\times 1{,}095$.
c $100\% - 0{,}95\% = 99{,}05\%$, dus $\times 0{,}9905$.
d $100\% - 17{,}6\% = 82{,}4\%$, dus $\times 0{,}824$.
e $100\% + 17{,}6\% = 117{,}6\%$, dus $\times 1{,}176$.
f $100\% - 0{,}18\% = 99{,}82\%$, dus $\times 0{,}9982$.
g $100\% - 2{,}8\% = 97{,}2\%$, dus $\times 0{,}972$.
h $100\% + 2{,}8\% = 102{,}8\%$, dus $\times 1{,}028$.
i $100\% - 1{,}1\% = 98{,}9\%$, dus $\times 0{,}989$.